Department of Economics- FEA/USP

Autopsy of a Myth: Dissecting the Anatocism Fallacy in Amortization Systems

RODRIGO DE-LOSSO

JOSÉ CARLOS DE SOUZA SANTOS

WORKING PAPER SERIES Nº 2023-09

DEPARTMENT OF ECONOMICS, FEA-USP
WORKING PAPER Nº 2023-09

Autopsy of a Myth: Dissecting the Anatocism Fallacy in Amortization Systems

Rodrigo De-Losso (delosso@usp.br)

José Carlos de Souza Santos (jcdssan@usp.br)

Research Group: NEFIN

Abstract:
Compound capitalization – or anatocism – in loans is prohibited by law, although widely practiced. Court decisions often require that these products be valued in simple capitalization. This article demonstrates – in four alternative ways – that there is anatocism in a family of amortization systems, called the General Amortization System – SGA, in which interest is the product of its rate and the previous outstanding balance. This includes the Constant (or Hamburg) Amortization System – SAC, the Price (or French) and the American Systems, which imply anatocism. Furthermore, an original and economically based model is developed in order to build Simple Capitalization Amortization Systems – SACS, for infinite configurations of payments or amortizations, extendable to multiple and simultaneous focal-dates. The elegance of the model lies in the direct analogy to the case of compound capitalization, making its implementation immediate and working as its natural counterfactual.

Keywords: Anatocism, SGA, SMC, SACS, compound capitalization, simple capitalization, compound interest, simple interest, amortization systems

JEL Codes: E43, G12, G21, K12, M48.

Autópsia de um Mito: Dissecando a Falácia do Anatocismo em Sistemas de Amortização

Resumo:

A capitalização composta – ou anatocismo – em empréstimos é proibida por Lei, embora largamente praticada. As decisões judiciais frequentemente requerem que esses produtos sejam avaliados em capitalização simples. Este artigo demonstra – por quatro formas alternativas – que existe anatocismo numa família de sistemas de amortização, chamada Sistema Geral de Amortização – SGA, em que os juros são o produto de sua taxa pelo saldo devedor anterior. Isso inclui o Sistema de Amortização Constante (ou Hamburguês) – SAC, o Price (ou Francês) e o Americano, os quais implicam em anatocismo. Além disso, desenvolve-se modelo original e economicamente fundamentado, a fim de construir Sistemas de Amortização em Capitalização Simples – SACS, para infinitas configurações de pagamentos ou amortizações, extensível a múltiplas e simultâneas datas-focais. A elegância do modelo reside na analogia direta ao caso de capitalização composta, tornando sua implementação imediata e funcionando como seu contrafactual natural.

Palavras-Chave: Anatocismo, SGA, SMC, SACS, capitalização composta, capitalização simples, juros compostos, juros simples, sistemas de amortização.

Autópsia de um Mito: Dissecando a Falácia do Anatocismo em Sistemas de Amortização[1]

Rodrigo De-Losso[2]

José Carlos de Souza Santos[3]

Resumo:

A capitalização composta – ou anatocismo – em empréstimos é proibida por Lei, embora largamente praticada. As decisões judiciais frequentemente requerem que esses produtos sejam avaliados em capitalização simples. Este artigo demonstra – por quatro formas alternativas – que existe anatocismo numa família de sistemas de amortização, chamada Sistema Geral de Amortização – SGA, em que os juros são o produto de sua taxa pelo saldo devedor anterior. Isso inclui o Sistema de Amortização Constante (ou Hamburguês) – SAC, o Price (ou Francês) e o Americano, os quais implicam em anatocismo. Além disso, desenvolve-se modelo original e economicamente fundamentado, a fim de construir Sistemas de Amortização em Capitalização Simples – SACS, para infinitas configurações de pagamentos ou amortizações, extensível a múltiplas e simultâneas datas-focais. A elegância do modelo reside na analogia direta ao caso de capitalização composta, tornando sua implementação imediata e funcionando como seu contrafactual natural.

Palavras-chave: Anatocismo, SGA, SMC, SACS, capitalização composta, capitalização simples, juros compostos, juros simples, sistemas de amortização.

JEL CODE: E43, G12, G21, K12, M48

Versão: 23/09/2023

---

[1] Os autores agradecem pelos comentários de Renato Souza, Carlos Nathaniel Cavalcante, Clovis de Faro, Isaías Coelho e Gerson Lachtermacher, bem como os debates com Bruno Giovannetti e Armênio Rangel (*in memoriam*).

[2] Prof. Titular no Departamento de Economia da FEA-USP: delosso@usp.br.

[3] Prof. Associado no Departamento de Economia da FEA-USP: jcdssan@usp.br

1 MOTIVAÇÃO

Há uma intensa discussão, geralmente confinada a tribunais de justiça, sobre a existência de anatocismo, ou capitalização composta, em sistemas de amortização como o Sistema de Amortização Constante – SAC. Esse é um problema importante, porque a prática de anatocismo é proibida no Brasil – e em outros países europeus também (Baptista, 2008 e De-Losso, 2012) – pelo Decreto 22.626/33, pela Súmula 121 do STF e pelo art. 591 da Lei 10.406/02, resultando em severas implicações para o funcionamento do sistema de crédito no país. Contudo, a prática de capitalização composta de juros foi permitida a instituições financeiras[4] a partir 31/03/2000[5], desde que expressamente pactuada, de acordo com as Súmulas 539 do STJ e a 596 do STF. Nada obstante, a proibição do anatocismo não foi formalmente revogada, de modo que as decisões judiciais permanecem contraditórias entre si[6].

A discussão mais técnica não se resolve, porque se diz que não restam juros no saldo devedor quando são calculados na data t multiplicando-se o saldo devedor em $t – 1$ pela taxa de juros, sob a presunção de que são pagos a cada período de tempo. Em verdade, contudo, a cada período o credor faz jus aos juros apurados até aquele momento pelo regime de competência, mas não de caixa. Assim, nos sistemas de amortização usuais registram-se contabilmente esses juros e, para "fechar a conta", residualmente apura-se a **amortização contábil**, que encobre o anatocismo e confunde a natureza econômica da operação, ignorando-se a **amortização econômica**, que é o que realmente está sendo amortizado[7].

Este artigo demonstra que existe anatocismo numa classe genérica de sistemas de amortização, em que o sistema Francês ou Price, Hamburguês ou Sistema de Amortização Constante – SAC – e Americano são casos particulares. A demonstração é feita formalmente por quatro maneiras

[4] *Vide* Recurso Extraordinário 592377, julgado pelo STF em 04/02/2015.

[5] *In litteris*: "É permitida a capitalização de juros com periodicidade inferior à anual em contratos celebrados com instituições integrantes do Sistema Financeiro Nacional a partir de 31/3/2000 (MP n. 1.963-17/2000, reeditada como MP n. 2.170-36/2001), desde que expressamente pactuada" – SÚMULA 539, SEGUNDA SEÇÃO, julgado em 10/06/2015, DJe 15/06/2015.

[6] A Súmula 121 do STF prescreve: "É vedada a capitalização de juros, ainda que expressamente convencionada".

[7] A noção de amortização contábil e econômica será discutida precisamente no decorrer do texto. Por ora, convém entender que os livros de matemática financeira apenas descrevem as amortizações e juros contábeis omitindo esse fato.

alternativas, para alvejar inequivocamente os argumentos retóricos contrários ao resultado que se estabelece aqui.

Quando o Juízo conclui pela existência de anatocismo em um sistema de amortização, costuma mandar que a dívida seja recalculada em capitalização simples, a fim de apurar as devidas indenizações a quem pagou a mais. Ocorre que inexiste modelo economicamente fundamentado para construir sistemas de amortização em capitalização simples, na extensão de nosso conhecimento. Cunha (2023) esboça algo em espírito muito parecido com o deste artigo. Mais popular é um algoritmo eminentemente matemático de difícil intuição (ver Lachtermacher e de Faro, 2022; e Forger, 2009). Este artigo resolve esse segundo problema por meio de um modelo geral, para construir sistema de amortização em capitalização simples[8] – SACS –, abarcando infinitas configurações possíveis de pagamentos ou amortizações, extensível a múltiplas e simultâneas datas-focais. A elegância do modelo reside na analogia direta ao caso de capitalização composta, tornando sua implementação imediata e funcionando como seu contrafactual natural.

Com efeito, a questão de anatocismo não se restringe aos debates judiciais sobre financiamentos de longo prazo e/ou de imóveis, eis que a capitalização simples é usada largamente para apurar valores indenizatórios de sentenças judiciais; parcelamento de multas emitidas por entes públicos ou agências regulatórias; e, até pouco tempo atrás[9], de precatórios, cujo valor de face, ou seja sem correção monetária ou juros, totalizava R$ 273 bilhões em dezembro de 2022, dos quais 40% eram precatórios dos estados, e o resto era dividido igualmente entre União e municípios[10]. É muito difícil saber o valor atual exato desses precatórios, pois depende da data de início da ação; eis que uma ação ajuizada há 20 anos resulta em um valor de face multiplicado por 11, considerando correção monetária e juros em capitalização simples de 1% a.m.

Este artigo rejeita formalmente autores que sugerem a inexistência de anatocismo mesmo sob capitalização composta como Lapponi (2005), Pires e Negra (2005), Vieira Sobrinho (2012) e de Faro (2013 e 2014). Os dois primeiros textos usam o argumento de que os juros não são incorporados ao saldo devedor nos sistemas convencionais, pois liquidados a cada período. Os dois últimos autores entendem que o anatocismo é proibido como juros moratórios, mas não como juros

---

[8] De-Losso e Santos (2023) estudam e formalizam as propriedades do modelo.
[9] Pela Emenda 113, os precatórios passaram a ser corrigidos pela Selic a partir de 08 de dezembro de 2021. Até então, os juros eram calculados pela poupança em capitalização simples.
[10] Os autores agradecem ao Mercatório, na pessoa do Sr. Daniel Costa, pelo envio dos dados sobre precatórios.

remuneratórios[11]. Esta interpretação estrita de anatocismo diverge de autores como Lacombe (2004) e Rudge (2006), que entendem anatocismo como sinônimo de juros compostos, em conformidade com a Súmula 121 e art. 591 do novo Código Civil do Brasil/2002. Segue-se que este artigo adota essa interpretação mais ampla, consistentemente com Gomes e Scavone (2001), Antonik e Assunção (2006), Baptista (2008), e Nogueira (2013), especialmente porque leva em conta a Súmula 539/STJ, a qual implicitamente exige que o regime de capitalização seja pactuado inclusive no que cabe aos juros remuneratórios.

A Seção 2 se preocupa em definir os principais conceitos que são utilizados no artigo, baseada na literatura convencional de Matemática Financeira. Seu propósito é formalizar, unificar e sistematizar o entendimento sobre o assunto.

A estratégia de modelagem segue inicialmente definindo uma família geral de sistemas de amortização, batizada de Sistema Geral de Amortização – SGA na Seção 3. A ideia é construir uma classe com infinitas configurações de pagamentos ou amortizações, em seguida caracterizar os sistemas de amortização mais conhecidos como Americano, SAC e Price como casos particulares. Aplica-se o SGA para o caso atômico de um empréstimo com um único pagamento após n períodos e apresenta-se a primeira evidência de que existe anatocismo no SGA.

O segundo passo é desenvolver um sistema de amortização alternativo, mas que envolve conceitos econômicos fundamentais. Assim, a Seção 4 trata do Sistema de Múltiplos Contratos – SMC, proposto por De-Losso (2012) e De-Losso, Giovannetti e Rangel (2013). O SMC é uma ficção conveniente, que deriva o SGA a partir de conceitos econômicos mais primitivos, aplicando o princípio da (não-)arbitragem, por isso tem uma função análoga ao conceito de utilidade em Economia e, na prática, revela as operações econômicas latentes nos sistemas convencionais de amortização. Com isso, pode-se entender a natureza econômica dos juros e apurar a **amortização econômica** dos pagamentos, definida como sendo o valor descontado de cada parcela à data do mútuo. Essa distinção é fundamental para demonstrar formalmente e entender a existência de anatocismo no SGA e, por conseguinte, nos sistemas de amortização mais tradicionais. Esta é a segunda evidência de anatocismo.

[11] Não cabe ao economista interpretar se a proibição de anatocismo recai sobre juros moratórios e/ou remuneratórios. Sua função é dizer se há anatocismo após a decisão judicial determinando se é sobre um, outro ou ambos. Por certo, se a capitalização for composta, haverá anatocismo.

A partir do exemplo simples do SGA combinado com a caracterização do SMC, dissecam-se os juros contidos no SGA, período a período, e mostra-se ainda como a composição de juros emerge, mesmo sob amortização contábil positiva em todos os períodos. Essa técnica, que também serve para capitalização simples, permite que se construa o SGA a partir do SMC. É a terceira evidência de composição de juros nos sistemas de amortização mais utilizados. O mérito do modelo desenvolvido neste artigo está em entender a natureza econômica dos juros contidos no SGA e explicar por que o argumento de inexistência de anatocismo em sistemas mais convencionais, como SAC e Americano, é falacioso. Em grande síntese, o SGA oculta a capitalização composta operando ao registrar a apuração de juros em regime de competência e ao omitir sua natureza contábil, incluindo da amortização resultante.

O quarto passo é desenvolver um modelo para obtenção de um sistema de amortização em capitalização simples – SACS, geral, com fundamentos econômicos e de implementação imediata. Isso é feito de duas formas. A Seção 5 aplica o SMC ao caso de capitalização simples, obtendo-se os juros contábeis, período a período, e sua consolidação resulta num sistema de amortização análogo ao SGA, em que se considera como dada a sequência de pagamentos. Com isso, pode-se comparar exatamente como seria o sistema de amortização se a capitalização fosse simples ou composta para a mesma configuração de pagamentos. Essa comparação serve como contrafactual ao caso composto e constitui a quarta evidência da existência de anatocismo no SGA. Por ela, mostra-se, por exemplo, que os juros em t não correspondem ao produto da taxa pelo saldo devedor anterior no SACS.

A Seção 6 estende a ideia SACS de forma análoga e tão elegante quanto o método convencional. Isto é, os procedimentos das seções anteriores são necessários para compreender o modelo que é finalmente estabelecido nesta seção. Mostra-se como calcular os juros em capitalização simples aplicando-se recursivamente a taxa ao valor presente das parcelas ainda a liquidar. Isso é exatamente o que ocorre em capitalização composta, sendo importante por permitir calcular os pagamentos, conhecida a sequência de amortizações contábeis; ou as amortizações contábeis, dados os pagamentos. E tudo isso é feito sem a necessidade de calcular a cada período os juros de cada um dos pagamentos (ou contratos na linguagem do SMC) como executado na Seção 5. Essa é uma evidência complementar da existência de anatocismo no SGA.

A Seção 7 sugere como o SACS pode ser adaptado a diferentes e simultâneas datas-focais, assunto que é mais amplamente desenvolvido em De-Losso e Santos (2023).

Em todas as seções são construídos exemplos que permitem visualizar cada passo do que se está propondo, geralmente tomando como referência o tradicional, usado em financiamentos imobiliários.

A Seção 8 conclui o trabalho, enquanto a Seção 9 contém a bibliografia e, em separado, a legislação pertinente.

A Seção 10 traz um apêndice com quadros sinópticos em que se compara o SGA com o SACS. Isso é feito de duas formas. Na primeira, é dada a sequência de pagamentos; na segunda, a sequência de amortizações contábeis. A analogia entre um sistema e outro ilustra sua natureza econômica.

Apesar da importância e repercussão em termos econômicos, o interesse acadêmico por artigos como este costuma ser limitado. Essa dificuldade é um fenômeno documentado em Akerlof (2020). Na realidade, a discussão sobre este assunto, em particular, não é sistemática, é ainda apartada da academia, confusa e inconclusa. O artigo procura jogar luz sobre o tema de uma maneira formal, prover argumentos e demonstrações sistemáticos, com a expectativa de orientar os interessados sobre como proceder em cálculos judiciais e liquidação de sentenças. Ao mesmo tempo, supre uma lacuna da prática econômica sobre como construir sistema de amortização em capitalização simples.

2 CONCEITOS E DEFINIÇÕES

Esta seção estabelece os conceitos e definições universais aos sistemas de amortização de que este artigo trata, seja em capitalização composta, seja em capitalização simples. A rigor, constam de qualquer curso ou livro de Matemática Financeira, geralmente de maneira não sistematizada.

Essas definições, ainda que tediosas, são necessárias para o estabelecimento rigoroso do modelo, de suas consequências e das demonstrações.

Definição 1 – Juros Totais: Considere $P_t \in \mathbb{R}^+$ o valor de um empréstimo ou financiamento feito na data t, cuja configuração de pagamentos é $\{R_j \in \mathbb{R}^+\}_{j=t+1}^{n}$, $j, t \in \mathbb{N}$, então os juros acumulados totais, $J(n-t) \in \mathbb{R}^+$ calculados na data de liquidação n, são definidos como:

$$J(n-t) = \sum_{j=t+1}^{n} R_j - P_t.$$

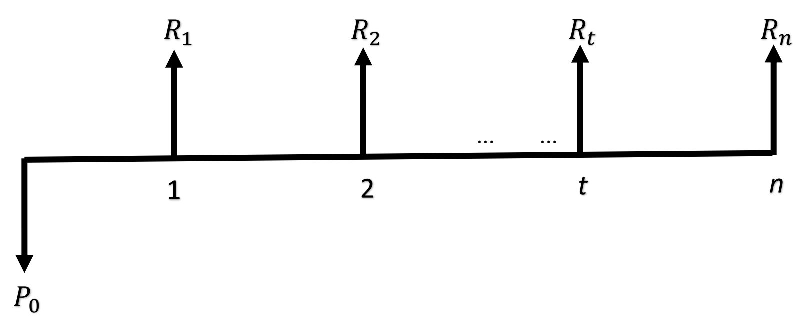
Não há muito sentido em imaginar que o total de pagamentos será menor que o valor originalmente emprestado, caso em que os juros seriam negativos.

Normalmente, interessa-se no empréstimo feito na data $t = 0$, caso em que:

$$J(n) = \sum_{j=1}^{n} R_j - P_0.$$

Note que a definição de juros totais prescinde da forma de capitalização e da taxa de juros, bastando serem dados o valor emprestado e a sequência de pagamentos. Esse fato é importante, porque a definição se aplica igualmente para qualquer sistema de capitalização.

A configuração do empréstimo convencional desta seção pode ser vista na figura a seguir.



No que segue, especializa-se a definição anterior para o caso simples, por sua relevância e por constituir a forma mais atômica de um empréstimo.

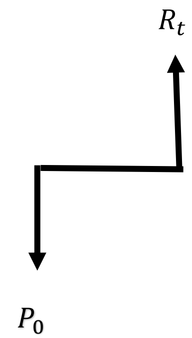
Definição 2 – Juros Totais em Empréstimo Simples: Considere P_t o valor de um empréstimo ou financiamento feito na data t, a ser pago na data n no valor R_n, tal que $R_j = 0$, para $j = t+1, t+1, \ldots, n-1$, então definem-se juros acumulados ou totais, $J(n-t)$, como:

$$J(n-t) = R_n - P_t\ .$$

Trata-se do empréstimo mais simples que existe. Por óbvio, se o empréstimo é feito na data $t = 0$ e pago numa data futura qualquer t, com $R_j = 0$ para $j \neq t > 0$, então mais geralmente:

$$J(t) = R_t - P_0 \,.$$

Esta é a forma mais simples ou atômica de um empréstimo, cuja configuração é dada pela figura a seguir:



É possível obter o valor presente de um empréstimo a partir de taxa de juros, conforme se defina regime de capitalização.

Definição 3 – Empréstimo Convencional em Capitalização Composta: Considere um empréstimo feito na data t à taxa de juros $r \in \mathbb{R}^+$, cuja configuração de pagamentos é dada por $\{R_j\}_{j=t+1}^{n}$. O valor desse empréstimo, P_t, em capitalização composta, é dado por:

Equação 1:

$$P_t = \sum_{j=t+1}^{n} \frac{R_j}{(1+r)^{j-t}} = (1+r)^t \times \sum_{j=t+1}^{n} \frac{R_j}{(1+r)^j}.$$

É preciso definir a taxa de juros periódica, sem a qual não se consegue obter o valor do empréstimo. Analogamente, dado P_t, pode-se usar a equação anterior para encontrar a taxa de juros que iguala ambos os seus lados.

Em geral, fixa-se o empréstimo em n pagamentos, caso em que se considera $t = 0$. Por conseguinte, se a data final estiver fixada, a Equação 1 representa o saldo devedor a cada instante de tempo.

Definição 4 – Empréstimo Convencional em Capitalização Simples: Considere um empréstimo feito na data t à taxa de juros r, cuja configuração de pagamentos é dada por $\{R_j\}_{j=t+1}^{n}$. O valor desse empréstimo na data t, P_t', em capitalização simples é dado por:

Equação 2:

$$P'_t = \sum_{j=t+1}^{n} \frac{R_j}{[1 + (j - t) \times r]}.$$

Para obter os juros totais desse empréstimo, aplica-se a Definição 1. Por certo, se o valor emprestado e os pagamentos forem os mesmos que no caso composto apresentado anteriormente, os juros totais serão os mesmos, mas a taxa r' de juros simples, consistente com a equação anterior, será $r' > r$.

Com essas definições, pode-se discutir o que vem a ser um sistema de amortização na data $t = 0$. Trata-se de um objeto que contém a cada instante de tempo o saldo devedor, $\{P_t\}_{t=0}^{n-1}$; as parcelas, $\{R_t\}_{t=1}^{n}$; as amortizações, $\{A_t\}_{t=1}^{n}$; os juros periódicos[12], $\{J_t\}_{t=1}^{n}$; e a taxa de juros, r, conforme segue:

Definição 5 – Sistema de Amortização: Objeto que descreve a dinâmica de empréstimo, constituindo-se do conjunto:

$$(\{R_t\}_{t=1}^{n}, \{P_t\}_{t=0}^{n-1}, \{A_t\}_{t=1}^{n}, \{J_t\}_{t=1}^{n}, r).$$

Cada um dos pagamentos contém uma parcela que corresponde à amortização e outra, que corresponde aos juros. Logo, cada pagamento é constituído de duas parcelas.

Definição 6 – Parcelas de um Pagamento: Cada pagamento, R_t, é constituído de duas parcelas, amortização contábil, $A_t \in \mathbb{R}$, e juros (contábeis), $J_t \in \mathbb{R}^+$, tal que:

$$R_t = A_t + J_t.$$

Ver-se-á, ao longo do artigo, formas de satisfazer essa igualdade. No caso convencional, os juros são obtidos a partir de uma fórmula paramétrica recursiva, sendo dada a sequência de amortizações ou pagamentos, de modo que se obtém residualmente a sequência de pagamentos ou amortizações, respectivamente. Mas, é possível também obter os juros de forma residual, como se verá na Seção 4.

[12] Note que $J(n-t) = \sum_{j=t+1}^{n} J_j$.

Usando esta definição combinada à Definição 2, conclui-se que a $A_t = P_0$, eis que esta é **amortização econômica** mais atômica.

Definição 7 – Consistência de um Sistema de Amortização: O sistema de amortização é consistente se $P_n = 0$.

O saldo devedor final precisa ser nulo para representar que todo o empréstimo foi devidamente liquidado e a soma das amortizações (contábeis ou econômicas) corresponde ao valor financiado.

Uma constatação imediata das Definição 1 e Definição 6 é enunciada no seguinte lema.

Lema 1: Dadas a Definição 1 e a Definição 6, então o saldo devedor é a soma das amortizações contábeis remanescentes à data do empréstimo t.

Prova:

Equação 3:

$$R_t = A_t + J_t \Rightarrow \sum_{j=t+1}^{n} R_j = \sum_{j=t+1}^{n} A_j + \sum_{j=t+1}^{n} J_j \Rightarrow$$

$$\sum_{j=t+1}^{n} R_j = \sum_{j=t+1}^{n} A_j + J(n-t) \Rightarrow P_t = \sum_{j=t+1}^{n} A_j.$$

$\blacksquare$

Importante notar nessa definição que A_j não se restringe a $\mathbb{R}^+$, podendo, pois, assumir valores negativos, desde que a igualdade seja satisfeita. Importante notar, também, que o Lema é válido sem que se distingam os valores individuais das parcelas. Por último, observe que o resultado independe do regime de capitalização.

3 SISTEMA GERAL DE AMORTIZAÇÃO – SGA

O SGA é o sistema de amortização convencional utilizado nos livros de Matemática Financeira e nas práticas corporativas. Trata-se de um sistema em capitalização composta no sentido da Definição 3.

Para caracterizá-lo de maneira geral, convém entender inicialmente o papel do saldo devedor e dos juros na mecânica do SGA.

3.1 SALDO DEVEDOR

Definição 8 – Saldo Devedor em Capitalização Composta: O saldo devedor em capitalização composta é dado pela expressão a seguir, dado P_0:

Equação 4:

$$P_t = (1+r) \times P_{t-1} - R_t, t > 0.$$

Disso decorre o seguinte Lema:

Lema 2: Se a Definição 8 for consistente, então ela resulta na Definição 3.

Prova: Pela Definição 3, deve-se mostrar que

$$P_t = \sum_{j=t+1}^{n} \frac{R_j}{(1+r)^{j-t}}.$$

Aplicando a Equação 4 recursivamente, obtém-se:

$$P_t = (1+r) \times P_{t-1} - R_t = (1+r) \times [(1+r)P_{t-2} - R_{t-1}] - R_t =$$

$$= (1+r)^2 \times P_{t-2} - (1+r) \times R_{t-1} - R_t = \cdots =$$

$$= (1+r)^t \times P_0 - \sum_{j=0}^{t-1} (1+r)^j \times R_{t-j} = (1+r)^t \times \left[P_0 - \sum_{j=0}^{t-1} \frac{R_{t-j}}{(1+r)^{t-j}} \right].$$

Pela consistência, aplica-se o Lema 1 a P_0 e obtém-se:

$$P_t = (1+r)^t \times \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{R_j}{(1+r)^j} - \sum_{j=1}^{t} \frac{R_j}{(1+r)^j} \right] = \left[\sum_{j=t+1}^{n} \frac{R_j}{(1+r)^{j-t}} \right].$$

▪

3.2 JUROS

O SGA se caracteriza, essencialmente, pela definição dos juros a cada período, $J_t \in \mathbb{R}^+$.

Definição 9 – Juros do SGA: Os juros do SGA é o produto da taxa de juros dada, r, pelo saldo devedor anterior, isto é:

Equação 5:

$$J_t = r \times P_{t-1}.$$

Por conseguinte, pode-se definir a parcela a ser paga a partir de uma dada sequência de amortizações, $\{A_t\}_{t=1}^{n}$. Segue-se daí a próxima proposição.

Proposição 1: Considere um sistema de amortização em capitalização composta, cujo saldo devedor é dado pela Definição 8, e os juros, pela Definição 9. Então:

Equação 6:

$$P_t = P_{t-1} - A_t = \sum_{j=t+1}^{n} A_j.$$

Prova: Considere a Definição 8 e substitua nela a Equação 5. Então:

$$P_t = (1 + r) \times P_{t-1} - R_t = P_{t-1} + r \times P_{t-1} - R_t = P_{t-1} + J_t - R_t.$$

Pela Definição 6, a primeira igualdade é imediata.

Dada a primeira igualdade, considere a substituição recursiva:

$$P_t = P_{t-2} - A_{t-1} - A_t = \cdots =$$

$$P_t = P_0 - \sum_{j=0}^{t-1} A_{t-j} = P_0 - \sum_{j=1}^{t} A_j.$$

Aplicando-se o Lema 1 a P_0, segue-se que:

$$P_t = \sum\nolimits_{j=1}^{n} A_j - \sum_{j=1}^{t} A_j = \sum_{j=t+1}^{n} A_j.$$

∎

A Equação 6 sugere que inexiste anatocismo no SGA, vez que o saldo devedor é constituído de amortizações futuras, aparentemente sem composição de juros nelas. Contudo, essa interpretação somente é válida quando o empréstimo é celebrando em $j = t > 1$, significando que as amortizações somam o empréstimo original. Quanto o empréstimo é celebrado em $j < t - 1$, com saldo devedor em $j > t + 1$, essa percepção é falaciosa como será mostrado adiante.

Em síntese, as derivações mostram que há quatro maneiras equivalentes de se obter o saldo devedor no SGA:

$$P_t = (1 + r) \times P_{t-1} - R_t = P_{t-1} - A_t = \sum_{j=t+1}^{n} A_j = (1 + r)^t \times \left[\sum_{j=t+1}^{n} \frac{R_j}{(1 + r)^j} \right].$$

A última igualdade sugere a existência de anatocismo, vez que capitaliza de maneira composta o valor presente das parcelas ainda a vencer, como será melhor discutido na Seção 3.3 a seguir.

A partir disso podem-se construir os elementos do sistema de amortização de forma recursiva, aplicando-se a cada período a Definição 6 para obter R_t dada a configuração de amortizações contábeis, $\{A_t\}_{t=1}^{n}$, ou A_t dada a configuração de pagamentos, $\{R_t\}_{t=1}^{n}$.

O exemplo a seguir pretende esclarecer como funciona o SGA, considerando $P_0 = \$\,3.000$, $r = 10\%$ e sistema de amortização constante – SAC, pelo qual $A_t = \frac{P_0}{n} = A$:

Tabela 1: Sistema de Amortização Constante – SAC

Período	Amortização	Juros	Pagamento	Saldo Devedor
	$A_t = \frac{P_0}{n}$	$J_t = r \times P_{t-1}$	$R_t = A_t + J_t$	$P_t = (1+r) \times P_{t-1} - R_t$
0				$ 3.000,00
1	$ 1.000,00	$ 300,00	$ 1.300,00	$ 2.000,00
2	$ 1.000,00	$ 200,00	$ 1.200,00	$ 1.000,00
3	$ 1.000,00	$ 100,00	$ 1.100,00	$ -

Esse modelo de apresentação do sistema de amortização é padrão, por isso referido como **representação canônica** do sistema de amortização com 5 colunas e um número de linhas igual à data de liquidação mais três, $n+3$, representando a evolução dinâmica do sistema.

As quatro maneiras equivalentes de se obter o saldo devedor se aplicam, como não poderia deixar de ser.

3.3 HIPÓTESE SOB DISCUSSÃO

Como se observa na Tabela 1, a ideia de que não existe anatocismo no sistema SAC reside na percepção de que o saldo devedor não incorpora os juros calculados a cada período sob a alegação que teriam sido pagos. Contudo, operações latentes, que obscurecem e camuflam o processo de formação das amortizações e do saldo devedor, precisam ser compreendidas antes de se concluir pela inexistência de anatocismo. As próximas seções dissecam essas operações. Em especial, mostra-se o processo de formação dos juros e do saldo devedor, para se verificar a existência ou não do anatocismo, partindo da Definição 9.

No que segue, define-se matematicamente o conceito de anatocismo para que se possa analisar propriamente como se constata sua existência, de forma consistente com Lacombe (2004).

Definição 10 – Anatocismo: Existe anatocismo quando os juros são capitalizados de forma composta. Matematicamente isso é representado da seguinte forma, para $0 \leq j < t-1$:

$$J_t = r \times (1+r)^{t-j-1} \times P_j.$$

Para ver como isso pode acontecer no caso do SGA, considere $j = 0$ e um empréstimo simples, de tal sorte tal que $R_j = 0$ para $j = 1, 2, \dots, t-1$, e $P_t = 0$ para satisfazer a Definição 7. Pela Equação 4:

$$P_{t-1} = (1+r) \times P_{t-2} = (1+r)^{\mathbf{2}} \times P_{t-3} = \cdots = (1+r)^{t-1} \times P_0.$$

Segue-se daí, aplicando o mesmo princípio para t, que:

$$P_t = 0 = (1+r) \times P_{t-1} - R_t = P_{t-1} + r \times P_{t-1} - R_t =$$

$$= P_{t-1} + r \times (1+r)^{t-1} \times P_0 - R_t \Longrightarrow R_t - P_{t-1} = r \times (1+r)^{t-1} \times P_0.$$

Como no empréstimo simples $P_{t-1} = A_t$, o resultado segue pela Definição 6, tal que $R_t - A_t = J_t = r \times (1+r)^{t-1} \times P_0$. O resultado vale geralmente para $t > j + 1$[13].

A partir dessas ideias, pode-se enunciar a hipótese que se deseja demonstrar: **Sempre existe anatocismo no SGA.** Há duas possibilidades alternativas a essa hipótese:

a. Nem sempre existe anatocismo no SGA;
b. Não existe anatocismo no SGA.

De imediato, mostra-se que existe anatocismo no SGA num caso específico de empréstimo simples, ficando claro que a hipótese alternativa de que "não existe anatocismo no SGA" é falsa. Na Seção 4 demonstra-se formalmente a hipótese de que sempre existe anatocismo no SGA.

A estratégia que se usa aqui é construir um sistema de amortização que inclui, como casos especiais, o SAC, o Francês e o Americano. Para isso, deve-se entender o que são dois sistemas de amortização distintos, mas financeiramente equivalentes.

Dois sistemas de amortização distintos, com mesmo prazo, em que os pagamentos são descontados à mesma taxa e resultam no mesmo valor presente são financeiramente equivalentes. Nesse sentido, existem infinitos sistemas de amortização equivalentes. Formalmente, De-Losso (2012) define da seguinte forma:

[13] Se $t = j + 1$, não é possível dizer se o regime de capitalização é composto ou simples.

Definição 11 – Equivalência Financeira: Um sistema de amortização é financeiramente equivalente a outro se ambos possuírem o mesmo prazo, e se o valor presente de suas parcelas, quando descontados à mesma taxa de juros, forem idênticos.

Pode-se agora provar que existem infinitos sistemas de amortização financeiramente equivalentes, quando os juros correspondem à taxa de empréstimo multiplicados pelo saldo devedor do período anterior.

Proposição 2: Suponha que P_0 seja o valor financiado em um sistema de amortização consistente, cuja sequência qualquer de pagamentos é $\{R_t\}_{t=1}^{n}$, em que $R_t = A_t + J_t$, com

$$J_t = r \times P_{t-1}, \text{e}$$

$$P_t = (1+r) \times P_{t-1} - R_t$$

sendo o saldo devedor em $t = 1,2, \dots, n$.

Então, todas as configurações de amortização são financeiramente equivalentes.

Prova: Lembrando a demonstração do Lema 2:

$$P_t = (1+r) \times P_{t-1} - R_t = (1+r)^t \times \left[P_0 - \sum_{j=0}^{t-1} \frac{R_{t-j}}{(1+r)^{t-j}}\right] =$$

$$= (1+r)^t \times \left[P_0 - \sum_{j=1}^{t} \frac{R_{t-j+1}}{(1+r)^{t-j+1}}\right] = (1+r)^t \times \left[P_0 - \sum_{j=1}^{t} \frac{R_j}{(1+r)^j}\right].$$

Pela condição de consistência dada pela Definição 7, tem-se que:

$$0 = (1+r)^n \times \left[P_0 - \sum_{j=1}^{n} \frac{R_j}{(1+r)^j}\right] \Rightarrow P_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{R_t}{(1+r)^t} \Rightarrow$$

$$P_0 = \sum_{t=1}^{n} A_t = \sum_{t=1}^{n} \frac{R_t}{(1+r)^t}.$$

▪

A importância dessa proposição reside na constatação que, dada uma sequência de amortizações e a taxa de juros, r, pode-se construir qualquer configuração de fluxo de pagamentos, vez que a Definição 6 se aplica. Além disso, a proposição é válida mesmo sob taxa de juros variável (ver Faro, 2013).

Pois bem, para entender que **existe anatocismo** no SGA, aplica-se essa ideia a um exemplo simples a ser comparado com o exemplo da Tabela 1. Suponha, um financiamento simples de $ 3.000,00 a ser pago em parcela única em $t = 3$, sob taxa de juros de 10%. Nesse caso $R_1 = R_2 = 0$, $A_1 = -J_1, A_2 = -J_2$ e, aplicando a Definição 3, a parcela final será:

$$R_3 = (1 + 0{,}1)^3 \times \$\ 3000 = \$\ 3.993{,}00.$$

Essa configuração mostra inequivocamente a existência de anatocismo no SGA. Transpondo isso para a apresentação canônica de um sistema de amortização, ter-se-ia, pois:

Tabela 2: Empréstimo Simples

Período	Amortização	Juros	Pagamento	Saldo Devedor
	$A_t = R_t - J_t$	$J_t = r \times P_{t-1}$	R_t	$P_t = (1 + r) \times P_{t-1} - R_t$
0				$ 3.000,00
1	$ (300,00)	$ 300,00	$ -	$ 3.300,00
2	$ (330,00)	$ 330,00	$ -	$ 3.630,00
3	$ 3.630,00	$ 363,00	$ 3.993,00	$ -

Nota-se que o saldo devedor vai contando juros sobre juros. Portanto, se na Tabela 1 aparentemente não havia anatocismo, na Tabela 2 é inequívoco havê-lo, usando a mesma metodologia em ambos os casos. Importante observar ainda que o anatocismo ocorre mesmo sem haver atraso do pagamento.

Note que sabemos que a amortização econômica é $ 3 mil. Mas, a Tabela 2 sugere que a amortização contábil, nesse caso, atinge $ 3.630,00. Isso dá uma ideia na natureza distinta das amortizações contábil e econômica. Essa observação será importante na Seção 4.2, em que se discute essa incorporação de juros na amortização contábil, razão de tanta confusão sobre a existência de anatocismo no SGA.

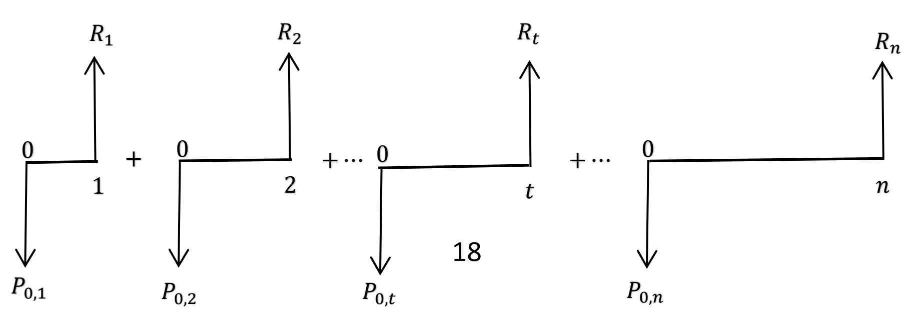
A Proposição 2 não distingue as maneiras de se amortizar o financiamento. Logo, se neste último exemplo configura-se anatocismo usando o SGA, o anterior deve configurar também por usar exatamente a mesma técnica de apuração, restando evidenciar o fenômeno. De todo modo, **a conclusão inequívoca é que existe anatocismo no SGA**, configurando a primeira evidência do fenômeno nos sistemas de amortização em que a Definição 9 é válida.

4 SISTEMA DE MÚLTIPLOS CONTRATOS – SMC

O Sistema de Múltiplos Contratos – SMC – foi, originalmente e independentemente, proposto por De-Losso (2012) e Vieira Sobrinho (2012) em um contexto de pagamentos uniformes. Esta seção generaliza o conceito para o caso de pagamentos irregulares.

O SMC é uma forma conveniente de derivar o SGA (e o SACS também) a partir de conceitos econômicos fundamentais, aplicando-se o Princípio da (não-)Arbitragem. Deve ser entendido como ferramenta auxiliar para evidenciar os processos latentes aos sistemas de amortização, os quais camuflam sua natureza econômica mais primitiva. Por isso, o SMC tem uma função análoga ao conceito de utilidade que o economista usa para entender a escolha do agente, mesmo sabendo que o agente, de fato, não maximiza sua utilidade, até porque a desconhece.

A ideia é transformar um empréstimo convencional, com n pagamentos, em n empréstimos simples como se fossem diferentes contratos. O fluxo de pagamentos não muda nem para o tomador nem para o credor. Ademais, como o valor consolidado é o mesmo que no caso convencional, o saldo devedor também não muda, já que calculado pela Equação 4 no caso de capitalização composta. Dessa forma, pode-se dizer que os riscos da operação não se alteram, nem sua natureza econômica original, vez que a taxa de juros está preservada. Apenas o arranjo formal é que muda ficcionalmente. Por isso, não há por que imaginar que a operação seja essencialmente diferente do caso convencional. Esquematicamente isso pode ser representado pela seguinte figura:



A partir disso, conhecida previamente a sequência de pagamentos $\{R_t\}_{t=1}^{n}$, por exemplo obtida via SGA, define-se a sequência de amortizações econômicas do SMC, $\tilde{A}_t$.

Definição 12 – Amortização no SMC: Define-se a sequência de amortizações no SMC por:

$$\left\{\tilde{A}_t \middle| \, \tilde{A}_t \equiv \frac{R_t}{(1+r)^t}\right\}_{t=1}^{n}.$$

Essa é a definição formal e geral para **amortização econômica**. Com isso, cada amortização corresponderá a um diferente contrato, da seguinte forma:

Equação 7:

$$P_{0,j=t} = \tilde{A}_t \equiv \frac{R_t}{(1+r)^t},$$

Em que $P_{0,j}$[14] representa o empréstimo simples feito no período inicial a vencer no período j.

O anatocismo no SMC é auto-evidente em cada um dos contratos, pois da Equação 7:

$$R_t = P_{0,t} \times (1+r)^t = P_{0,t} \times (1+r)^{t-1} + r \times (1+r)^{t-1} \times P_{0,t} = A_t + J_t.$$

A segunda parcela da última igualdade representa os juros multiplicando o saldo devedor de períodos anteriores já capitalizados com juros. Portanto, os juros recaem sobre juros anteriores. A primeira parcela é o saldo devedor acumulado até $t-1$.

A partir disso, pode-se observar que a soma das amortizações satisfaz simultaneamente a Definição 3 e a Definição 7:

$$\sum_{j=1}^{n} P_{0,j} = \sum_{t=1}^{n} \tilde{A}_t = \sum_{t=1}^{n} \frac{R_t}{(1+r)^t} = P_0.$$

[14] A notação $P_{t,j}$ indica o saldo devedor na data t do contrato j. O maior interesse é entender esses contratos quando $t = 0$.

Nota-se que a soma de juros totais no SMC e no SGA são idênticas, vez que os pagamentos são os mesmos e o valor emprestado em ambos é o mesmo, conforme a Definição 1.

Conhecendo-se a sequência de pagamentos e amortizações, segue-se que os juros são obtidos de forma residual, aplicando-se a Definição 2, que é o conceito mais primitivo de um empréstimo e que é consistente com a Definição 6:

$$J(t) = R_t - P_{0,t} = R_t - \tilde{A}_t \,.$$

Por conseguinte, o que muda no SMC em relação ao SGA é como se definem juros e amortização, permanecendo os demais elementos rigorosamente iguais, e a Definição 6 se mantém igualmente respeitada.

Para ficar claro como funciona esse modelo, considere o exemplo SAC apresentado na seção 3. Nesse caso, subdividem-se os três pagamentos em três contratos da seguinte forma:

Decomposição de P_0, tal que $P_{0,j} = \frac{R_j}{(1+r)^j}$		
$P_{0,1}$	$P_{0,2}$	$P_{0,3}$
$\frac{\$\ 1.300{,}00}{(1+0{,}1)} = \$\ 1.181{,}82$	$\frac{\$\ 1.200{,}00}{(1+0{,}1)^2} = \$\ 991{,}74$	$\frac{\$\ 1.100{,}00}{(1+0{,}1)^3} = \$\ 826{,}45{,}45$

Esses mesmos pagamentos correspondem às amortizações do SMC. Logo, aplicando as modificações sugeridas pelo SMC, a Tabela 1 configura-se da seguinte forma.

Tabela 3: Exemplo SAC usando SMC

Período	Amortização	Juros	Pagamento	Saldo Devedor
	$\tilde{A}_t = \frac{R_t}{(1+r)^t}$	$J(t) = R_t - \tilde{A}_t$	R_t	$P_t = (1+r) \times P_{t-1} - R_t$
0				$ 3.000,00
1	$ 1.181,82	$ 118,18	$ 1.300,00	$ 2.000,00
2	$ 991,74	$ 208,26	$ 1.200,00	$ 1.000,00
3	$ 826,45	$ 273,55	$ 1.100,00	$ -

Como se pode observar, o total de juros aumenta com os períodos, ainda que as prestações caiam. Essa é uma constatação que contrasta com o que se observa na Tabela 1.

A seguir, demonstra-se formalmente a existência de anatocismo no SGA da seguinte forma: Considerando-se que a sequência de pagamentos e saldo devedor é a mesma que a do SMC, cabendo apenas reinterpretar como a amortização e os juros são contados no pagamento, se há anatocismo no SMC, é forçoso inferir que existe o mesmo no SGA.

Proposição 3: Considere o Sistema de Múltiplos Contrato – SMC como um sistema de amortização consistente, em que

$$P_{0,j=t} = \tilde{A}_t \equiv \frac{R_t}{(1+r)^t}.$$

Suponha que P_0 seja o valor financiado e que

$$P_t = (1+r) \times P_{t-1} - R_t$$

seja o saldo devedor em $t = 1, 2, \ldots, n$. Então, sempre existe anatocismo no SGA.

Prova: Na Proposição 2, verifica-se que:

$$P_t = (1+r) \times P_{t-1} - R_t = (1+r)^t \times \left[P_0 - \sum_{j=1}^{t} \frac{R_j}{(1+r)^j} \right].$$

Pela Definição 7, verifica-se:

$$P_0 = \sum_{t=1}^{n} \tilde{A}_t = \sum_{t=1}^{n} \frac{R_t}{(1+r)^t}.$$

Por conseguinte:

$$P_t = (1+r)^t \times \left[\sum_{j=1}^{n} \tilde{A}_j - \sum_{j=1}^{t} \tilde{A}_j\right] = (1+r)^t \times \sum_{j=t+1}^{n} \tilde{A}_j.$$

O saldo devedor na data t corresponde aos contratos a pagar capitalizados de maneira composta, indicando anatocismo no SMC, o que já era auto-evidente. Como os saldos devedores de SGA e SMC são idênticos, é forçoso concluir que há anatocismo no SGA, em função de como os juros são calculados ali:

$$J_t = r \times P_{t-1} = r \times (1+r)^{t-1} \times \sum_{j=t}^{n} \tilde{A}_j = r \times (1+r)^{t-1} \times \sum_{j=t}^{n} P_{0,j}.$$

∎

Como o SGA inclui os sistemas de amortização mais tradicionais pela Proposição 2, eis que fica evidenciado o anatocismo nesse sistema. Esta é a segunda evidência de anatocismo e constitui a prova formal de sua existência.

É inconsistente concluir pela inexistência de anatocismo no SGA e existência no SMC, quando ambos são rigorosamente iguais, exceto na forma de definir juros e amortização. A questão passa a ser qual a natureza econômica dos juros e das amortizações calculados no SGA e qual a conexão disso com o SMC. É o que as próximas seções discutem.

4.1 A CONEXÃO ENTRE OS JUROS DO SMC E DO SGA

Se ainda não ficou evidente que há anatocismo no SGA, considere a seguinte estratégia. Aplique o SGA em cada um dos contratos do SMC, consolide esses contratos e constate que se retorna à configuração original na versão SGA. Assim, disseca-se a natureza econômica dos juros computados nesse sistema – SGA – e se mostra a composição de juros período a período. E, por essa estratégia, verifica-se que inexiste atraso nos pagamentos, restando amortizações negativas, o que permite caracterizar o anatocismo.

Para entender melhor, considere o SAC da Tabela 1, mas decomposto em três contratos, correspondentes a cada pagamento como na Tabela 3. Aplicando o SGA a cada contrato verifica-se:

Tabela 4: Contrato $P_{0,1}$

Período	Amortização	Juros	Pagamento	Saldo Devedor
	$A_t = R_t - J_t$	$J_t = r \times P_{t-1}$	R_t	$P_t = (1 + r) \times P_{t-1} - R_t$
0				\$ 1.181,82
1	\$ 1.181,82	\$ 118,18	\$ 1.300,00	\$ -
2	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -
3	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -

Tabela 5: Contrato $P_{0,2}$

Período	Amortização	Juros	Pagamento	Saldo Devedor
	$A_t = R_t - J_t$	$J_t = r \times P_{t-1}$	R_t	$P_t = (1 + r) \times P_{t-1} - R_t$
0				\$ 991,74
1	\$ (99,17)	\$ 99,17	\$ -	\$ 1.090,91
2	\$ 1.090,91	\$ 109,09	\$ 1.200,00	\$ -
3	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -

Tabela 6: Contrato $P_{0,3}$

Período	Amortização	Juros	Pagamento	Saldo Devedor
	$A_t = R_t - J_t$	$J_t = r \times P_{t-1}$	R_t	$P_t = (1 + r) \times P_{t-1} - R_t$
0				\$ 826,45
1	\$ (82,64)	\$ 82,64	\$ -	\$ 909,09
2	\$ (90,91)	\$ 90,91	\$ -	\$ 1.000,00
3	\$ 1.000,00	\$ 100,00	\$ 1.100,00	\$ -

$$P_{t,j} = (1 + r)^t \times P_{0,j}.$$

Observe, especialmente nas Tabela 5 e Tabela 6, que há juros compostos. A seguir, observe que consolidando a três tabelas anteriores, somando-se as entradas correspondentes de cada uma delas, resulta exatamente na Tabela 1.

A análise do exemplo sugere o que acontece no SGA. Se os saldos devedores dos contratos individualizados carregam juros compostos e, quando consolidados, geram exatamente o mesmo resultado do SGA, é forçoso concluir que o SGA carrega juros compostos, cabendo à forma de obter a amortização e os juros desse sistema a origem da incompreensão.

Para entender melhor, calculam-se os juros periódicos de cada um dos contratos representados pelo SMC, nos quais existe anatocismo. Os contratos não liquidados implicam amortizações contábeis negativas ao longo dos períodos, as quais são somadas à amortização consolidada do contrato que é liquidado, camuflando a natureza econômica do que realmente está acontecendo: **a amortização do pagamento que não é liquidado é incorporada ao saldo devedor e capitaliza juros**.

Por uma questão de registro contábil, no montante de juros do SGA parte é antecipação de contratos ou pagamentos com vencimentos futuros, gerando a base de tributação para fins de imposto de renda em regime de competência (De-Losso, Giovannetti e e Rangel (2013) discutem as implicações macroeconômicas desse fato), mas esses juros não recebidos são incorporados ao saldo devedor e sobre eles incidem novos juros. Esse ponto foi percebido por Gomes e Scavone Jr. (2001), argumentando que o artifício dos credores é cobrar os juros antecipadamente na parcela vencida. Como o saldo devedor do SGA e os juros ali contidos não são devidamente segmentados, cria-se a falácia de que os juros não são compostos nesse sistema, pois o fenômeno econômico do que realmente está acontecendo permanece oculto no SGA.

A conclusão de que há anatocismo nos contratos individuais, mas não no sistema consolidado – SGA, gera uma inconsistência lógica a ser enfrentada, a saber: se as partes implicam anatocismo, e se o todo é a soma das partes, por que o todo não implicaria anatocismo, se a metodologia do SGA é exatamente a mesma em todas as situações?

Para ver o que está acontecendo, lembre que $P_{t,j}, j \geq t$ é o saldo devedor do contrato j no período t do SMC. Por certo, $P_{t,j} = 0, j < t$. Como esses contratos são pagos apenas na maturidade, o saldo devedor de cada um deles é dado por:

$$P_{t,j} = (1 + r)^t \times P_{0,j}.$$

Definição 13 – Juros Periódicos no SMC: Considere os juros de cada contrato do SMC, aplicando-se o SGA. Definem-se os juros periódicos, $J_{t,j}$, de acordo com o SGA:

$$J_{t,j}|j \geq t = r \times P_{t-1,j} = r \times (1+r)^{t-1} \times P_{0,j}.$$

Nota-se em realidade, a caracterização da incidência de juros em regime de competência.

Nessas condições, pode-se reforçar a Proposição 3 com a seguinte:

Proposição 4: Considere cada contrato individual do SMC em regime SGA, tal que os juros periódicos são dados por:

$$J_{t,j}|j \geq t = r \times P_{t-1,j} = r \times (1+r)^{t-1} \times P_{0,j}.$$

Então, os juros do SGA correspondem à consolidação dos juros dos contratos individuais do SMC que são capitalizados em forma composta. Isto é:

$$\sum_{j=t}^{n} J_{t,j} = J_t.$$

Prova: A prova é direta.

$$\sum_{j=t}^{n} J_{t,j} = r \times (1+r)^{t-1} \times \sum_{j=t}^{n} P_{0,j} = r \times (1+r)^{t-1} \times \sum_{j=t}^{n} \tilde{A}_j =$$

$$= r \times (1+r)^{t-1} \times \left[P_0 - \sum_{j=1}^{t-1} \frac{R_j}{(1+r)^j} \right] = r \times P_{t-1} = J_t.$$

▪

Como os juros do SGA são parcelas de juros constituídos de forma composta, mais uma vez é forçoso concluir pelo anatocismo no SGA, haja vista evidente que saldo devedor do SGA e os próprios juros carregam em si capitalização composta. Esta é a terceira evidência de anatocismo no SGA.

O que segue reconstrói o exemplo de SAC usando o algoritmo proposto. Em primeiro lugar, é necessário encontrar os juros consolidados em cada período dos contratos do SMC, o que é feito na última coluna da decomposição de juros. Observe que a soma dos valores em coluna resulta nas parcelas a serem pagas.

Tabela 7: Decomposição dos Juros

	Valor Financiado: SMC			
	$P_{0,j} = \frac{R_j}{(1+r)^j}$			
	$P_{0,1}$	$P_{0,2}$	$P_{0,3}$	$P_0 = \sum_{j=1}^{n} P_{0,j}$
	\$ 1.181,82	\$ 991,74	\$ 826,45	\$ 3.000,00
	Decomposição dos Juros			
	$J_{t,j} \mid j \geq t = r \times (1+r)^{t-1} \times P_{0,j}$			
Período	$J_{t,1}$	$J_{t,2}$	$J_{t,3}$	$J_t = \sum_{j=t}^{n} J_{t,j}$
1	\$ 118,18	\$ 99,17	\$ 82,64	\$ 300,00
2	\$ -	\$ 109,09	\$ 90,91	\$ 200,00
3	\$ -	\$ -	\$ 100,00	\$ 100,00
	$R_t = P_{0,t} + \sum_{j=1}^{t} J_{j,t} = P_{0,t} + J(t)$			
$r = 10\%$	R_1	R_2	R_3	
	\$ 1.300,00	\$ 1.200,00	\$ 1.100,00	

A partir dessa tabela é possível obter a Tabela 1, nela inserindo $\{J_t\}_{t=1}^{n}$ e extraindo residualmente dali a amortização contábil dada pela diferença entre pagamentos e juros.

Outra constatação é o entendimento sobre a diferença fundamental entre J_t e $J(t)$; enquanto este representa os juros acumulados até a data t, aquele representa a soma dos juros de cada contrato na data t.

4.2 A CONEXÃO ENTRE AS AMORTIZAÇÕES DO SMC E DO SGA

A Tabela 7 ajuda a entender a relação entre as amortizações e juros do SGA e do SMC, observando-se a coluna em que os juros são consolidados a cada período, e a última linha em que cada prestação é obtida pela soma dos juros contábeis apurados a cada período com o valor do principal. De fato, sabendo que ambos os sistemas possuem exatamente os mesmos pagamentos, segue-se que:

$$A_t + J_t = \tilde{A}_t + J(t) \Rightarrow A_t + \sum_{j=t}^{n} J_{t,j} = \tilde{A}_t + \sum_{j=1}^{t} J_{j,t} \Rightarrow$$

Equação 8

$$A_t = \tilde{A}_t + \sum_{j=1}^{t} J_{j,t} - \sum_{j=t}^{n} J_{t,j}.$$

Verifica-se que o elemento $J_{t,t}$ é comum a ambos os somatórios. Ademais, a última igualdade mostra que a amortização contábil do SGA compreende a soma de três objetos. O primeiro é a amortização econômica, $\tilde{A}_t$. O segundo são os juros acumulados do pagamento a ser feito na data t e que carregam a composição de juros. Finalmente a terceira parcela corresponde à exclusão dos juros em t dos pagamentos ainda não liquidados. Assim, para a amortização contábil do SGA corresponder à econômica do SMC, seria necessário excluir-lhe os juros periódicos das parcelas ainda a liquidar e incluir-lhe os juros periódicos anteriores à liquidação da parcela vencida em t. Essa soma que explicita a verdadeira natureza das amortizações do SGA, como notado na Tabela 2.

É interessante verificar na Equação 8 os dois casos extremos em que $t = 1$ e $t = n$:

$$t = 1: A_1 = \tilde{A}_1 + J_{1,1} - \sum_{j=1}^{n} J_{1,j} = \tilde{A}_1 - \sum_{j=2}^{n} J_{1,j}\,;$$

$$t = n: A_n = \tilde{A}_n + \sum_{j=1}^{n} J_{j,n} - J_{n,n} = \tilde{A}_n + \sum_{j=1}^{n-1} J_{j,n}.$$

Note que a amortização contábil do primeiro período é menor que a amortização econômica da mesma data, pois deduzem-se juros periódicos relativamente a outros contratos. Por outro lado, a amortização do último período é maior que a correspondente no SMC, pois embute em si juros de períodos anteriores do contrato a vencer em $t = n$. Eis porque a amortização do SGA está contaminada com juros “indevidos” a maior ou a menor computados nessa rubrica, quando essas quantidades deveriam estar apartadas da amortização econômica. E isso acontece porque o cálculo de juros do SGA é um registro contábil que inclui no início juros de pagamentos não liquidados e, no fim, exclui o somatório dos juros do contrato que vence naquele período, porque foram contados anteriormente. Em outras palavras, há um ajuste na amortização do SGA em razão da forma de contabilizar juros por competência nesse sistema.

Com efeito, um fato notório do sistema Francês, em que os pagamentos são uniformes, é que os juros diminuem exponencialmente ao longo do tempo, enquanto a amortização cresce exponencialmente. Contudo, trata-se de uma constatação anti-intuitiva, vez que pagamentos mais demorados ensejam juros maiores.

A Equação 8 explica bem o que está acontecendo, apesar de a amortização econômica estar diminuindo exponencialmente, de acordo com o que se vê na primeira parcela. Conforme os períodos passam, os juros acumulados crescem e os juros dos contratos a vencer diminuem, ou seja, mais juros temporais são incorporados ao longo do tempo e menos juros de cada contrato são subtraídos. Esse é, em essência, o truque contábil para fazer desaparecer os juros periódicos e capitalizados, de forma a sofismar a inexistência de anatocismo no SGA; na amortização contábil estão embutidos juros que a esvaziam (no início do fluxo) ou a inflam (no fim do fluxo) em relação à amortização econômica.

4.3 CONSTRUINDO O SGA A PARTIR DO SMC

Esta seção explica como obter o SGA a partir do SMC. Ela funciona para esclarecer o procedimento de como será obtido o Sistema de Amortização em Capitalização Simples – SACS, que seguirá os mesmos passos.

Os passos serão aqui sistematizados da seguinte forma:

a. Defina o valor financiado, P_0;
b. Defina o fluxo de pagamentos, $\{R_t\}_{t=1}^{n}$[15];
c. Calcule a taxa de juros, r, implícita a esse fluxo de caixa usando a Definição 3;
d. Decomponha P_0 em *n* parcelas $\{P_{0,j}\}_{j=1}^{n}$, com $P_{0,j} = \frac{R_j}{(1+r)^j} = \tilde{A}_j$;
e. Calcule os juros de cada prestação da seguinte forma para $t > 0$:

[15] Como já foi mencionado, pode-se construir a sequência de pagamentos partindo-se da sequência de amortizações do SGA.

$$J_t = r \times (1+r)^{t-1} \times \sum_{j=t}^{n} \tilde{A}_j = r \times (1+r)^{t-1} \times \left[P_0 - \sum_{j=1}^{t-1} \frac{R_j}{(1+r)^j} \right];$$

f. Determine a amortização contábil do SGA usando a Definição 6:

$$A_t = R_t - J_t;$$

g. Obtenha o saldo devedor consolidado usando a Definição 3 ou Equação 6:

$$P_t = (1+r)^t \times \sum_{j=t+1}^{n} \tilde{A}_j = P_{t-1} - A_t.$$

O passo e. corresponde ao procedimento representado na Tabela 7 onde se consolidam os juros na última coluna. Os demais passos recuperam os resultados do SGA na representação canônica.

5 SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO EM CAPITALIZAÇÃO SIMPLES – SACS

Esta Seção deriva o SACS a partir do SMC, de forma análoga à feita com o SGA na última Seção. A ideia é construir uma representação em capitalização simples para servir como contrafactual ao caso de capitalização composta. Em outro artigo De-Losso e Santos (2023) formalizam e estudam as propriedades desse modelo, inclusive a discussão sobre data-focal.

Inicialmente consideram-se n contratos individuais, o valor emprestado e uma sequência de pagamentos; e, a partir desses elementos, calculam-se os juros individuais periódicos como em empréstimo simples. Em seguida, consolidam-se os juros periódicos, obtendo-se a amortização residual pela Definição 6. Quanto ao saldo devedor resultante, ele é obtido com a fórmula já derivada na Equação 6.

Importante observar que a Equação 4 não funciona em capitalização simples, como ficará claro em seguida. As seções seguintes caracterizam os elementos principais do SACS, culminando com a proposição que demonstra a consistência do SACS.

O modelo geral que segue é naturalmente mais intuitivo que o de Lachtermacher e de Faro (2022) e de implementação imediata em razão de sua similaridade com SGA, sendo q discussão sobre datas-focais é esboçada na 7. Convém antecipar que esta seção apresentará ainda uma versão de implementação usando a decomposição de juros oriunda do SMC. Esse passo fundamenta o procedimento da Seção 6, o qual usa uma maneira recursiva geral de construir o sistema de amortização muito próximo da representação canônica.

5.1 FUNDAMENTOS DO SACS

No caso do SACS, é preciso usar capitalização simples. Assim, é necessário aplicar as ideias do SMC, considerando cada contrato em capitalização simples.

Definição 14 – Amortização no SACS: Define-se a sequência de amortizações no SACS por:

$$P'_{0,j} = \frac{R_j}{(1 + j \times r')} \equiv \hat{A}_j.$$

Adiante, deve-se provar que a condição de consistência da Definição 7 é satisfeita.

5.2 SALDO DEVEDOR

O propósito desta seção em caracterizar, por analogia ao SGA, os elementos do SACS.

Definição 15 – Saldo Devedor no SACS: Define-se o saldo devedor do SACS em capitalização simples por:

$$P'_t = (1 + t \times r') \times \sum_{j=t+1}^{n} \hat{A}_j = (1 + t \times r') \times \left(P'_0 - \sum\nolimits_{j=1}^{t} \hat{A}_j \right).$$

Note a similaridade de construção com o SGA, exceto pelo regime de capitalização.
Agora, considerando tratar-se de capitalização simples, convém definir o cálculo dos juros nessa condição.

5.3 JUROS PERIÓDICOS

Definição 16 – Juros Periódicos no SACS: Considere os juros de cada contrato do SMC. Definem-se os juros periódicos, $J'_{j,t}$, como:

$$J'_{t,j} | j \geq t = r' \times P'_{0,j}.$$

A partir disso, a consolidação dos juros no SACS é dada pela soma dos juros periódicos:

$$\sum_{j=t}^{n} J'_{t,j} = J'_t.$$

Isto é:

$$\sum_{j=t}^{n} J'_{t,j} = r' \times \sum_{j=t}^{n} P'_{0,j} = r \times \sum_{j=t}^{n} \hat{A}_j = r' \times \left(P'_0 - \sum_{j=1}^{t-1} \hat{A}_j \right) = J'_t.$$

Mais uma vez, note a similaridade de construção com o SGA, exceto pelo regime de capitalização.

5.4 CONSTRUINDO O SACS A PARTIR DO SMC

O procedimento a seguir aplica a mesma lógica da derivação do SGA e concebe o SACS. Na Seção 6 os procedimentos serão consideravelmente simplificados. Como uma discussão mais formal do procedimento está em De-Losso e Santos (2023), o propósito desta seção é dar uma primeira intuição dos passos a seguir, considerando capitalização simples, para fins de construir um contrafactual ao caso composto:

a. Defina o valor financiado, $P_0 = P'_0$;
b. Defina o fluxo de pagamentos, $\{R_t\}_{t=1}^{n}$;
c. Calcule a taxa de juros, r', implícita a esse fluxo de caixa, usando a Definição 4;
d. Decomponha P_0 em *n* parcelas $\left\{P'_{0,j}\right\}_{j=1}^{n}$, com $P'_{0,j} = \frac{R_j}{(1+j \times r')} \equiv \hat{A}_j$;
e. Calcule os juros de cada prestação da seguinte forma:

$$J'_t = r' \times \sum_{j=t}^{n} \hat{A}_j = r' \times \left(P'_0 - \sum_{j=1}^{t-1} \hat{A}_j \right);$$

f. Determine a amortização contábil usando a Definição 6:

$$A'_t = R_t - J'_t;$$

g. Obtenha o saldo devedor consolidado:

$$P'_t = (1 + t \times r') \times \sum_{j=t+1}^{n} \hat{A}_j = P'_{t-1} - A'_t.$$

As mesmas observações da Seção 4.3 se aplicam aqui. Além disso, esse algoritmo precisa satisfazer a condição de consistência, a saber, $P'_n = 0$

Proposição 5: Seja

$$P'_t = (1 + t \times r') \times \sum_{j=t+1}^{n} \hat{A}_j$$

e

$$A'_t = R_t - J'_t,$$

então o SACS é consistente.

Prova: Primeiro, demonstra-se que

$$(1 + t \times r') \times \sum_{j=t+1}^{n} \hat{A}_j = P'_{t-1} - A'_t.$$

De fato[16]:

$$P'_{t-1} = (1 + (t-1) \times r') \sum_{j=t}^{n} \hat{A}_j = (1 + t \times r') \sum_{j=t}^{n} \hat{A}_j - r' \times \sum_{j=t}^{n} \hat{A}_j \text{ e}$$

$$-A'_t = -R_t + J_t = -(1 + t \times r')\, \hat{A}_t + r' \times \sum_{j=t}^{n} \hat{A}_j$$

Somando-se $-A'_t$ a P'_{t-1}:

[16] Os autores agradecem a Renato Santos por oferecer essa demonstração.

$$P'_{t-1} - A'_t = (1 + t \times r') \sum_{j=t+1}^{n} \hat{A}_j.$$

Agora, considere

$$P'_t = P'_{t-1} - A'_t = P'_{t-2} - A'_{t-1} - A'_t = \cdots = P'_0 - \sum_{j=1}^{t} A'_j.$$

Para verificar a consistência, quando $t = n$, encontra-se pela Definição 4:

$$P'_n = P'_0 - \sum_{j=1}^{n} A'_j = 0.$$

▪

No que segue, reconstrói-se o exemplo da Tabela 1, usando o valor emprestado e fluxo de pagamentos. Para esse fim, deve-se achar a taxa de juros implícita a esse fluxo de caixa, isto é:

$$P'_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{R_t}{1 + t \times r'}.$$

Resolvendo isso por métodos numéricos, encontra-se a taxa $r' = 10{,}60\%$. A seguir, aplicando-se o algoritmo, é necessário encontrar os juros consolidados em cada períodos dos contratos do SMC.

Tabela 8: Decomposição dos Juros – SACS

	Valor Financiado: SMC			
	$P'_{0,j} = \dfrac{R_j}{(1 + j \times r')}, r' = 10{,}60\%$			
	$P'_{0,1}$	$P'_{0,2}$	$P'_{0,3}$	$P_0 = \sum_{j=1}^{n} P'_{0,j}$
	$ 1.175,38	$ 990,06	$ 834,55	$ 3.000,00
	Decomposição dos Juros			
	$J'_{t,j} \mid j \geq t = r' \times P'_{0,j}$			
Período	$J'_{t,1}$	$J'_{t,2}$	$J'_{t,3}$	$J'_t = \sum_{j=t}^{n} J'_{t,j}$
1	$ 124,62	$ 104,97	$ 88,48	$ 318,07
2	$ -	$ 104,97	$ 88,48	$ 193,45
3	$ -	$ -	$ 88,48	$ 88,48
	$R_t = P'_{0,t} + \sum_{j=1}^{t} J'_{j,t} = P'_{0,t} + J'(t)$			
	R_1	R_2	R_3	
	$ 1.300,00	$ 1.200,00	$ 1.100,00	

Agora, pode-se construir a representação canônica de um sistema de amortização em capitalização simples, transpondo os juros consolidados, $\{J'_t\}_{t=1}^{n}$, obtidos na tabela anterior.

Tabela 9: Consolidando os Múltiplos Contratos em SACS – $\boldsymbol{r' = 10,60}\%$

Período	Amortização	Juros	Pagamento	Saldo Devedor
	$A'_t = R_t - J'_t$	J'_t	R_t	$P'_t = P'_{t-1} - A'_t$
0				$ 3.000,00
1	$ 981,93	$ 318,07	$ 1.300,00	$ 2.018,07
2	$ 1.006,55	$ 193,45	$ 1.200,00	$ 1.011,52
3	$ 1.011,52	$ 88,48	$ 1.100,00	$ -

Comparando a Tabela 9 com a Tabela 1, pode-se concluir que, ajustado pela taxa de desconto ao mesmo fluxo de pagamentos, os juros totais são iguais. Além disso, em capitalização simples, o saldo devedor é tal que $P_t' > P_t, t = 1,2, \dots, n-1$.

O SACS é a quarta evidência de que existe anatocismo no SGA; caso contrário, a dinâmica de juros e das amortizações deveria ser a mesma que no caso composto. Por conseguinte, verifica-se no SACS que:

$$r' \neq \frac{J_t'}{P_{t-1}'}.$$

O importante dessa observação é que, mesmo o valor total dos juros sendo igual no sistema de capitalização composta e no simples, a relação periódica entre juros e o saldo devedor é constante naquela, mas varia nesta. Portanto, um elemento característico da capitalização simples é que não vale a relação típica de juros e saldo devedor anterior observada no SGA, constituindo mais uma evidência contra o argumento retórico de capitalização simples desse sistema de amortização.

Se fosse utilizada a mesma taxa de juros do sistema em capitalização composta, ficaria a dúvida sobre como decompor P_0. Uma forma de resolver é assumir $P_{0,j}' = P_{0,j}$ do SGA e aplicar a taxa sobre esse valor contratado. Esse procedimento tem o inconveniente de mudar o valor periódico da amortização contábil[17]. Nesse caso, calculam-se os juros da seguinte forma:

[17] Essa dificuldade é superada na Seção 6.1.

Tabela 10: Decomposição dos Juros

	Valor Financiado: SMC			
	$P'_{0,j} = \frac{R_j}{(1 + j \times r')}, r' = 10,0\%$			
	$P'_{0,1}$	$P'_{0,2}$	$P'_{0,3}$	$P_0 = \sum_{j=1}^{n} P'_{0,j}$
	$ 1.181,82	$ 991,74	$ 826,45	$ 3.000,00
	Decomposição dos Juros			
	$J'_{t,j} \mid j \geq t = r' \times P'_{0,j}$			
Período	$J'_{t,1}$	$J'_{t,2}$	$J'_{t,3}$	$J'_t = \sum_{j=t}^{n} J'_{t,j}$
1	$ 118,18	$ 99,17	$ 82,64	$ 300,00
2	$ -	$ 99,17	$ 82,64	$ 181,82
3	$ -	$ -	$ 82,64	$ 82,64
	$R_t = P'_{0,t} + \sum_{j=1}^{t} J'_{j,t} = P'_{0,t} + J'(t)$			
	R_1	R_2	R_3	
	$ 1.300,00	$ 1.190,08	$ 1.074,38	

Note que os contratos têm o mesmo valor presente em capitalização composta e simples, comparando-se as Tabela 7 e Tabela 10.

Agora constrói-se o a representação canônica de sistema de amortização a partir desses dados, transpondo os juros, $\{J'_t\}_{t=1}^{n}$, e o fluxo de pagamentos da última linha, $\{R_t\}_{t=1}^{n}$, para a Tabela 11, de modo que se obtém a amortização por resíduo e o saldo devedor correspondente:

Tabela 11: Consolidando os Múltiplos Contratos em SACS – $r' = 10,0\%$

Período	Amortização	Juros	Pagamento	Saldo Devedor
	$A'_t = R'_t - J'_t$	J'_t	R'_t	$P'_t = P'_{t-1} - A'_t$
0				\$ 3.000,00
1	\$ 1.000,00	\$ 300,00	\$ 1.300,00	\$ 2.000,00
2	\$ 1.008,26	\$ 181,82	\$ 1.190,08	\$ 991,74
3	\$ 991,74	\$ 82,64	\$ 1.074,38	\$ -

O que se observa é que os juros totais pagos são \$ 35,54 menores que os juros da Tabela 1. Isso é aferido consolidando-se a diferença de cada uma das parcelas em relação às parcelas originais. De qualquer forma, definida a mesma taxa de juros para um dado valor emprestado, o regime de capitalização simples, como se sabe, gera menos juros que em capitalização composta.

6 SACS TURBINADO

O modelo proposto para o SACS pressupõe que é dada a sequência de pagamentos. Esta seção estuda outras situações de interesse, cuja característica comum é a omissão da sequência de pagamentos, mas são dados a taxa de juros, r', e o valor emprestado, P'_0 . A primeira situação ocorre quando é dada a sequência de amortizações contábeis, $\{A_t\}_{t=1}^{n}$, e é necessário determinar os pagamentos consistentes com essas amortizações. A segunda situação é quando se deseja que o pagamento seja uniforme sob capitalização simples. A solução de ambos os casos requer a caracterização de um problema de otimização, como se verá.

Esse problema de otimização, por sua vez, gera uma equação recursiva para se calcularem os juros consolidados análoga ao caso SGA. Como resultado, é possível construir um sistema de amortização em capitalização simples com a representação canônica aproximada, de modo que a seção conclui apresentando a versão mais operacional do SACS, prescindindo da decomposição periódica de juros para conceber o sistema de amortização. Portanto, o resultado da seção simplifica consideravelmente os procedimentos para construir o SACS

6.1 SEQUÊNCIA DE AMORTIZAÇÕES CONTÁBEIS

Imagine que é dada uma sequência de amortizações contábeis, $\{A_t\}_{t=1}^{n}$, o valor a ser emprestado, P_0', e a taxa de juros em capitalização simples, r'. O problema agora é encontrar a sequência de pagamentos consistente com esses dados. Nessa situação o algoritmo proposto na Seção 5 não funcionará, mas a construção dos passos ali sugeridos é mandatória, desde que se promovam algumas adaptações no algoritmo e se resolva um problema de otimização.

Para entender como funciona a adaptação quando as amortizações são dadas, lembre-se de que os juros da representação canônica são obtidos pela diferença dos pagamentos e amortizações pela Definição 6. Ao mesmo tempo, pode-se usar a **tabela de decomposição de juros**, para obter os juros periódicos a partir de R_t. Os juros calculados pelos dois procedimentos precisam ser iguais, satisfeito o valor presente do empréstimo contratado. Segue-se, assim, a maneira para encontrar a sequência de pagamentos que iguala os juros nos dois procedimentos. Em outras palavras, a ideia é encontrar exatamente a sequência de pagamentos tal que, se aplicado o modelo desenvolvido na Seção 5, resulta nos mesmos juros e nas mesmas amortizações contábeis que foram usadas como entrada para o algoritmo que será apresentado aqui.

Ou seja, usando as tabelas anteriores como inspiração, a ideia é **igualar os juros dados pela tabela de decomposição dos juros e pela representação canônica**, adotando-se os seguintes passos:

a. Defina o valor financiado, P_0';
b. Defina a sequência de amortizações contábeis, $\{A_t\}_{t=1}^{n}$;
c. Defina o valor inicial do fluxo de pagamentos, $\{R_t'\}_{t=1}^{n}$, o qual pode até ser constante;
d. Encontre as parcelas $\{P_{0,j}'\}_{j=1}^{n}$, com $P_{0,j}' = \frac{R_j'}{(1+j\times r')}$, oriundas do valor inicial arbitrado;
e. Calcule os juros contábeis de cada prestação da seguinte forma:

$$J_t' = R_t' - A_t;$$

f. Obtenha o saldo devedor consolidado:

$$P_t' = P_{t-1}' - A_t;$$

g. Calcule os juros econômicos das parcelas decompostas por

$$J_{t,j}' | j \geq t = r' \times P_{0,j}';$$

h. Consolide esses juros em:

$$\hat{J}'_t = \sum_{j=t}^{n} J'_{t,j}\,;$$

i. Resolva o seguinte problema de otimização[18]:

$$\min_{\{R_t\}_{t=1}^{n}} \sum_{t=1}^{n} \left(\hat{J}'_t - J'_t\right)^2 \text{ sujeito a}$$

$$P'_0 = \sum_{j=1}^{n} P'_{0,j}$$

j. Obtenha agora as parcelas consistentes com esses juros decompostos por

$$R_t = P'_{0,t} + \sum_{j=1}^{t} J'_{j,t} = P'_{0,t} + J'(t).$$

A ideia aqui é que, por construção, os juros econômicos consolidados por período, obtidos por decomposição de cada parcela, são iguais aos juros contábeis na representação canônica. Desse modo, busca-se justamente encontrar a sequência de pagamentos que resulte nessa igualdade, produzindo-se o fluxo de amortização desejado.

Isso permite, ainda, comparar duas soluções possíveis sobre como reconstruir um sistema de amortização em capitalização simples a partir de um contrato em SGA e obter o diferencial de pagamentos feitos: A primeira solução está na Seção 5.4, considerando como dadas as **amortizações econômicas**, obtidas aplicando-se a técnica sugerida pelo SMC; a segunda está nesta seção em que são dadas as **amortizações contábeis**.

O exemplo a seguir ilustra o procedimento. Imagine que as amortizações contábeis de um empréstimo de $ 3.000,00 sejam constantes a uma taxa de juros de 10% e pago em três vezes. Ache os pagamentos consistentes com essas parcelas.

Montando o problema de otimização[19], encontram-se os seguintes resultados:

[18] A minimização da diferença absoluta também é possível.

[19] Aqui, usou-se o Solver do Excel para o problema. A planilha pode ser enviada a quem pedir por e-mail. Não se testou a hipótese de usar a ferramenta num caso de centenas de prestações. Pode ser necessário programar o procedimento, usando R, por exemplo.

Tabela 12: Decomposição dos Juros

	Valor Financiado: SMC			
	$P'_{0,j} = \dfrac{R_j}{(1 + j \times r')}, r' = 10{,}0\%$			
	$P'_{0,1}$	$P'_{0,2}$	$P'_{0,3}$	$P_0 = \sum_{j=1}^{n} P'_{0,j}$
	\$ 1.181,82	\$ 984,85	\$ 833,33	\$ 3.000,00
	Decomposição dos Juros			
	$J'_{t,j} \mid j \geq t = r' \times P'_{0,j}$			
Período	$J'_{t,1}$	$J'_{t,2}$	$J'_{t,3}$	$J'_t = \sum_{j=t}^{n} J'_{t,j}$
1	\$ 118,18	\$ 98,48	\$ 83,33	\$ 300,00
2	\$ -	\$ 98,48	\$ 83,33	\$ 181,82
3	\$ -	\$ -	\$ 83,33	\$ 83,33
	$R_t = P'_{0,t} + \sum_{j=1}^{t} J'_{j,t} = P'_{0,t} + J'(t)$			
	R_1	R_2	R_3	
	\$ 1.300,00	\$ 1.181,82	\$ 1.083,33	

Agora constrói-se o a representação canônica de sistema de amortização a partir desses dados, transpondo os juros, $\{J'_t\}_{t=1}^{n}$, e o fluxo de pagamentos da última linha, $\{R_t\}_{t=1}^{n}$, para a Tabela 13, de modo que se obtêm os juros por resíduo e o saldo devedor correspondente:

Tabela 13: Consolidando os Múltiplos Contratos em SACS - $r' = 10,0\%$

Período	Amortização	Juros	Pagamento	Saldo Devedor
	A'_t	$J'_t = R'_t - A'_t$	R'_t	$P'_t = P'_{t-1} - A'_t$
0				\$ 3.000,00
1	\$ 1.000,00	\$ 300,00	\$ 1.300,00	\$ 2.000,00
2	\$ 1.000,00	\$ 181,82	\$ 1.181,82	\$ 1.000,00
3	\$ 1.000,00	\$ 83,33	\$ 1.083,33	\$ -

Por certo, os juros residuais da Tabela 13 têm que ser iguais aos juros obtidos na Tabela 12. E segue-se que essa forma de resolver é mais próxima do ideal da sentença judicial.

Comparando a Tabela 13 com a Tabela 11, os juros totais aumentam de \$ 564,46 para \$ 565,15. Ou seja, no exemplo SAC-SACS, essa forma de calcular é ligeiramente menos favorável ao devedor. Em ambos os casos, os juros são menores que no caso de capitalização composta, apresentado na Tabela 1.

O problema de otimização pode ser caracterizado por suas condições de primeira ordem e indica uma forma mais direta de compor o SACS.

Proposição 6: Suponha um empréstimo, P'_0, a taxa de juros r' e uma sequência qualquer de amortizações contábeis, $\{A_t\}_{t=1}^{n}$, e sejam os juros dados por

$$J'_t = R'_t - A_t.$$

Considere a decomposição periódica de juros dada por

$$\hat{J}'_t = r' \times \sum_{j=t}^{n} P'_{0,j}.$$

Sabendo que os juros periódicos consolidados e contábeis devem-se igualar, então a sequência de pagamentos consistente com essa hipótese é dada por

Equação 9

$$R_t' = A_t + r \times \left[P_0' - \sum_{j=1}^{t-1} \frac{R_j'}{(1 + r' \times j)}\right] = A_t + r \times \sum_{j=t}^{n} \frac{R_j'}{(1 + r' \times j)}, t > 1,$$

sendo

$$R_1' = A_1 + r' \times P_0'.$$

Prova: Considere o problema de otimização:

$$\min_{\{R_t'\}_{t=1}^{n}} \sum_{t=1}^{n} \left(\hat{J}_t' - J_t'\right)^2 \text{ sujeito a}$$

$$P_0' = \sum_{j=1}^{n} \frac{R_j'}{(1 + r \times j)}.$$

A minimização ocorre quando os juros contábeis se igualam à decomposição de juros periódica consolidada. Analiticamente, os argumentos da função objetivo são lineares, portanto o problema é bem definido, de modo que as condições de primeira ordem geram o resultado requerido.

▪

Nesse problema cada pagamento é a **amortização contábil** somada aos juros em capitalização simples que recaem sobre o valor do empréstimo original líquido das amortizações econômicas dos contratos já encerrados em t, ou seja, sobre o valor presente das parcelas ainda a vencer. Na prática, como o algoritmo é recursivo, é necessário compor a base de juros pelo fluxo a pagar da dívida em valor presente, $D_t = \left(P_0' - \sum_{j=1}^{t-1} \frac{R_j'}{(1+r\times j)}\right), t > 1$, com $D_1 = P_0'$.

Comparando as formas de obter os juros consolidados em capitalização simples e composta. Neste o caso, a Proposição 2 mostra que:

$$J_t = r \times (1 + r)^{t-1} \times \sum_{j=t}^{n} P_{0,j} = r \times (1 + r)^{t-1} \times \left(P_0 - \sum_{j=1}^{t-1.} P_{0,j}\right) = r \times P_{t-1}.$$

Considerando que a concepção econômica para a obtenção dos juros é análoga ao caso de capitalização composta, no caso do SACS verifica-se que:

$$J_t' = r' \times \sum_{j=t}^{n} P_{0,j}' = r' \times \left(P_0' - \sum_{j=1}^{t-1} P_{0,j}' \right) = r' \times D_t,$$

em que

$$D_t = P_0' - \sum_{j=1}^{t-1} P_{0,j}'.$$

A outra constatação é que a Equação 9 pode ser usada para encontrar as amortizações contábeis, quando é dada a sequência de pagamentos, simplificando a construção da representação canônica do sistema de amortização, pois a decomposição dos juros periódicos torna-se ociosa. Contudo, diferentemente do caso de capitalização composta, em vez de se construir o saldo devedor, deve-se construir de forma auxiliar o valor líquido da dívida ainda a pagar, D_t. A próxima seção usa essa técnica para construir o sistema de amortização.

6.2 PAGAMENTOS UNIFORMES

Imagine que são dados o valor a ser emprestado, P_0', e a taxa de juros em capitalização simples, r', e se pede qual o pagamento uniforme consistente com esses dados. Nessa situação o modelo proposto não vai funcionar, mas a construção dos passos ali sugeridos é mandatória. Nessa condição, é preciso promover algumas adaptações nos procedimentos para resolver o problema de otimização. A ideia é, usando as tabelas anteriores como inspiração, encontrar os pagamentos uniformes que, trazidos a valor presente, resultam no valor emprestado:

a. Defina o valor financiado, P_0';
b. Defina arbitrariamente o pagamento uniforme, $\{R'\}_{t=1}^{n}$;
c. Defina o valor presente das *n* parcelas por $P_{0,j}' = \frac{R'}{(1+j \times r')}$;
d. Agora resolva o seguinte problema de minimização, de acordo com a Definição 4:

$$\min_{R} \left(P_0' - \sum_{j=1}^{n} P_{0,j}' \right)^2 ;$$

e. Reconstrua as tabelas agora, sabendo o pagamento que satisfaz o problema.

A solução do problema é trivial e dada por:

$$R = \frac{P_0'}{B},$$

em que

$$B = \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{(1 + t \times r')}.$$

O exemplo a seguir ilustra o procedimento desenvolvido ao final da Seção 6.1.

Imagine que um empréstimo de $ 4.400,00, pagos em quatro parcelas uniformes a uma taxa de juros de 10%. Ache os pagamentos consistentes com essas parcelas. A seguir constrói-se o sistema de amortização.

Calculando-se B, obtém-se:

$$B = \sum_{t=1}^{4} \frac{1}{(1 + t \times 0{,}1)} = 3{,}225941 \Rightarrow R = \frac{\$\ 4400}{3{,}225941} = \$\ 1.363{,}94.$$

Segue-se que o sistema de amortização será dado por:

Tabela 14: Consolidando os Múltiplos Contratos em SACS – $\boldsymbol{r' = 10\%}$

Período	Amortização	Fluxo a Pagar[20]	Juros	Pagamento	Saldo Devedor
	$A_t' = R - J_t'$	$D_t = P_0' - \sum_{j=1}^{t-1} \frac{R_j}{(1 + r' \times j)}$	$J_t' = r' \times D_t$	$R = \frac{P_0'}{B}$	$P_t' = P_{t-1}' - A_t'$
0					$ 4.400,00
1	$ 923,94	$ 4.400,00	$ 440,00	$ 1.363,94	$ 3.476,06
2	$ 1.047,94	$ 3.160,05	$ 316,01	$ 1.363,94	$ 2.428,12
3	$ 1.161,60	$ 2.023,43	$ 202,34	$ 1.363,94	$ 1.266,52
4	$ 1.266,52	$ 974,25	$ 97,42	$ 1.363,94	$ -

[20] $D_1 = P_0'$.

A inspeção da Tabela 14 deixa evidente que o saldo devedor não se confunde com o valor descontado dos fluxos a pagar. Isto, em verdade, acontece no SGA, devido à capitalização ser composta.

7 DATA-FOCAL

A capitalização simples impede a cindibilidade da taxa de juros. Por essa característica, um pagamento futuro descontado a uma data intermediária é desigual do valor presente desse mesmo pagamento capitalizado a essa data intermediária. Para ver isso matematicamente, imagine um pagamento na data t, descontado à data $0 < k < t$ e verifique que o resultado apurado difere se este pagamento é descontado à data inicial e depois capitalizado até a data k:

$$\frac{R_t}{1 + r \times t} \times (1 + r \times k) \neq \frac{R_t}{1 + r \times (t - k)} \Rightarrow (1 + r \times k) \times [1 + r \times (t - k)] \neq (1 + r \times t).$$

A capitalização composta, por sua vez, carrega em si a propriedade de cindibilidade, haja vista que:

$$\frac{R_t}{(1 + r)^t} \times (1 + r)^k = \frac{R_t}{(1 + r)^{t-k}}.$$

Isso sugere uma situação conhecida como data-focal no caso de capitalização simples, em que o ajuste de valores de um sistema de amortização é feito numa data diferente da data inicial.

A mudança da data-focal pode ocorrer quando uma das partes acha que o contrato que assinou precisa ser reequilibrado seja porque a capitalização de juros deve ser simples, e não composta como costuma ser contratado, seja porque houve outro fato que requer a renegociação do que fora originalmente acordado.

Pare entender melhor, considere a definição de data-focal a seguir:

Definição 17 – Data-Focal: A data-focal, k, de um sistema de amortização em capitalização simples é aquela em que se verifica:

$$P_0 \times (1 + r' \times k) = \sum_{t=1}^{k} R'_t \times [1 + r' \times (k - t)] + \sum_{t=k+1}^{n} \frac{R'_t}{1 + r' \times (t - k)}.$$

De-Losso e Santos (2023) sugerem-se duas possíveis soluções para o problema, mantendo o SACS inalterado. Essas soluções estão sinteticamente esboçadas no Apêndice deste artigo, nas Seção 10.2 e Seção 10.3. As soluções permitem que o SACS para diferentes ou simultâneas datas-focais, generalizando o procedimento de Forger (2009).

8 CONCLUSÃO

Este artigo desenvolve o Sistema Geral de Amortização – SGA –, o qual inclui os tradicionais sistemas Americano, Sistema de Amortização Constante – SAC – ou Hamburguês e o Sistema Francês ou Price. Há duas razões para essa generalização:

i. Dada a sequência de amortizações, $\{A_t\}_{t=1}^{n}$, podem-se construir os pagamentos correspondentes a partir da taxa de juros, r, do valor emprestado, P_0 e da forma de calcular juros periódicos, $J_t = r \times P_{t-1}$, em que P_t é o saldo devedor em t;
ii. Mostrar que existe anatocismo no SGA no caso de empréstimo simples.

Em seguida, com um argumento de não-arbitragem, transforma-se um contrato de empréstimo de n pagamentos em n contratos de pagamentos simples, cada um vencendo conforme o prazo previsto no contrato único original. Trata-se do Sistema de Múltiplos Contratos – SMC –, cujo mérito é deixar explícita a existência de anatocismo nas parcelas individualizadas. A partir do SMC, é possível reconstruir o SGA, conhecendo-se a sequência de parcelas, $\{R_t\}_{t=1}^{n}$, dali originadas, mas mudando a interpretação de amortização e juros para sua definição econômica mais primitiva. Três são as conclusões desse exercício:

a. Se existe anatocismo no SMC, é forçoso concluir o mesmo para o caso do SGA;
b. O SGA inclui juros de pagamentos futuros a cada período, ainda não liquidados, em forma de competência, de modo a tratar-se mais de um registro contábil do direito a juros do que seu recebimento;
c. Para que o sistema de amortização fique consistente, deduzem-se da amortização periódica os juros havidos por competência, ocultando a natureza econômica de composição de juros do sistema e criando-se a amortização contábil.

A partir das constatações anteriores, combina-se o SGA com o SMC, para entender a natureza econômica dos juros de cada pagamento e descobre-se que os juros do SGA refletem exatamente a dinâmica de juros do SMC, confirmando a existência de anatocismo do SGA.

Essa combinação de técnicas inspira a criação do Sistema de Amortização em Capitalização Simples – SACS. Usando a decomposição de pagamentos sugerida pelo SMC, o cálculo de juros em capitalização simples e a reconstrução do sistema de amortização como feito para o SGA, define-se um modelo para encontrar o SACS combinando-se a tabela de decomposição de juros com a representação canônica.

Finalmente, encontra-se uma maneira recursiva de se calcular os juros em SACS, análogo a capitalização composta e que leva diretamente à construção da representação canônica. Isso é feito por meio de um problema de otimização, inspirado na modelagem SMC/SACS, pela qual os juros consolidados da tabela de decomposição devem-se igualar com juros da representação canônica.

No melhor do conhecimento dos autores, trata-se de resultado inédito e original, que ainda tem o mérito de permitir a comparação direta entre o SGA e o SACS, ficando evidente que existe anatocismo no SGA, já que inexiste no SACS, até porque neste, $J_t \neq r \times P_{t-1}$.

O Apêndice sistematiza a modelagem desenvolvida neste artigo passo a passo. Aqui segue um resumo em palavras.

a. Se forem dadas a sequência de pagamentos e o valor emprestado, é possível encontrar a taxa de juros compatível com o tipo de capitalização;
b. Se forem dadas a sequência de pagamentos e a taxa de juros, é possível encontrar o valor emprestado compatível com o tipo de capitalização;
c. Se for dada a sequência de amortizações contábeis ou econômicas, é necessário que seja dada também a taxa de juros para que seja possível encontrar a sequência de pagamentos compatível com o tipo de capitalização;
d. A representação canônica do SACS requer uma coluna auxiliar para os juros, a fim de se calcular os juros sobre as prestações não pagas descontadas à data do mútuo;
e. É possível generalizar o SACS para uma data-focal $k > 0$, com a vantagem de manter a consistência econômica do modelo do ponto de vista da data-focal original.

A coluna auxiliar é possível tanto em capitalização composta como em capitalização simples, já que se conhece a regra de formação dos juros. No caso de capitalização composta isso é dado pela Equação 5; no caso de capitalização simples, pela Equação 9.

Em todos os casos, podem-se decompor os juros por período e por pagamentos (ou contratos) para entender como se obtêm os juros consolidados da representação canônica.

Em todos os casos, é possível estabelecer uma analogia entre o SGA e o SACS, merecendo destaque a forma de obter os juros em cada caso, justamente porque o anatocismo só ocorre naquele, mas não neste sistema de capitalização.

9 BIBLIOGRAFIA

AKERLOF, George A. Sins of Omission and the Practice of Economics. **Journal of Economic Literature,** vol. 58, n.º 2, p. 405–418, 2020.

ANTONIK, Luis R., ASSUNÇÃO, Márcio S. Tabela Price e Anatocismo. **Revista de Administração da Unimep**, vol. 4, n.º 1, p. 119-136, 2006.

BAPTISTA, André Z. **Juros: taxas e capitalização**. São Paulo: Saraiva, 2008.

CUNHA, Pedro-Waldo F. **A Matemática do Capital**. São Paulo: All Print Editora, 2023.

DE-LOSSO, Rodrigo. **Amortizações**. São Paulo: Tese de Livre Docência, USP, 2012.

DE-LOSSO, Rodrigo; GIOVANNETTI, Bruno C. & RANGEL, Armênio S. Sistema de Amortização por Múltiplos Contratos. **Economic Analysis of Law Review,** vol. 4, n.º 1, p.p. 160-180, 2013.

DE-LOSSO, Rodrigo & SANTOS, José Carlos de Souza. SACS: Sistema de Amortização em Capitalização Simples. São Paulo-FEA/USP: em execução, 2023.

FARO, Clovis J. D. L. D. Uma Nota Sobre Amortização de Dívidas: Juros Compostos e Anatocismo. **Revista Brasileira de Economia** (Impresso), v. 67, p. 283-295, 2013.

FARO, Clovis J. D. L. D. Uma Nota Sobre Amortização de Dívidas e Prestações Constantes. **Revista Brasileira de Economia** (Impresso), v. 68, p. 363-371, 2014.

FORGER, Frank M. Saldo Capitalizável e Saldo Não Capitalizável: Novos Algoritmos para o Regime de Juros Simples. USP: RT-MAP-0905, 2009.

GOMES, Pedro Afonso; SCAVONE JÚNIOR, Luiz Antonio. A tabela Price é ilegal? Jus Navigandi, Teresina, ano 6, n.º 49, 1 fev. 2001. Disponível em: <http://jus.com.br/revista/texto/736>. Acesso em: 04/7/2023.

LACHTERMACHER, Gerson; FARO, Clovis J. D. L. D. Sistemas de Amortização no Regime de Juros Simples: Uma Metodologia Geral. Ensaios Econômicos, n.º 835, 2022.

LACOMBE, Francisco. **Dicionário de Administração.** São Paulo: Campus, 2006.

LAPPONI, Juan C. **Matemática Financeira.** Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.

NOGUEIRA, Jorge M. **Tabela Price: Mitos e Paradigmas**, 3.ª ed. Campinas: Millennium Editora, 2013.

PIRES, Marco A. A.; NEGRA Elizabeth M. S. Juros Tabela Price – Discussão no Âmbito da Perícia Contábil. **Revista Brasileira de Contabilidade**, vol. 34, n.º 155, p. 37-52, 2005.

RUDGE, Luiz F. **Enciclopédia de Finanças**. São Paulo: Saraiva, 2006

TELES, Luiz. D. A Tabela Price e a Prática do Anatocismo. 2002. Obtido via internet em 21/06/2012.

VIEIRA SOBRINHO, José Dutra. **Cobrança de Juros sobre Juros – Anatocismo**. São Paulo: Almedina, 2012.

9.1 LEGISLAÇÃO CONSULTADA

LEI Nº 10.931, DE 2 DE AGOSTO DE 2004 em https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2004-2006/2004/lei/l10.931.htm: ver especialmente ver art. 28, § 1.º.

LEI Nº 10.406, DE 10 DE JANEIRO DE 2002 ou Novo Código Civil em https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/2002/l10406compilada.htm: ver especialmente art. 591.

Decreto 22.626/33 ou Lei da Usura em http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/decreto/d22626.htm.

Súmula 121 do STF em https://jurisprudencia.stf.jus.br/pages/search/seq-sumula121/false.

Recurso Extraordinário 592377, julgado pelo STF em 04/02/2015.

MP n. 1.963-17/2000, reeditada como MP n. 2.170-36/2001 em http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/mpv/2170-36.htm.

Súmula 539 do STJ em https://www.jusbrasil.com.br/jurisprudencia/stj/sumulas/sumula-n-539-do-stj/1289711136.

Súmula 596 do STF em https://portal.stf.jus.br/jurisprudencia/sumariosumulas.asp?base=30&sumula=2017.

Emenda Constitucional 113 em https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/emendas/emc/emc113.htm.

10 APÊNDICE

10.1 QUADROS SINÓPTICOS

Dado o que se viu, pode-se enunciar um algoritmo geral para qualquer sistema de capitalização. É o que esta seção se propõe.

Todo sistema de amortização, seja com capitalização composta ou simples, deverá seguir os mesmos passos para sua construção. Isso assegura que o plano de pagamentos assim construído é de fato um sistema de amortização típico. Então, considere o seguinte algoritmo:

i. Defina o regime de capitalização: simples ou composta.
ii. Defina o valor financiado, P_0 e o fluxo de pagamentos, $\{R_t\}_{t=1}^{n}$;
    a. Defina a taxa de juros, r ou r', e o fluxo de amortizações, $\{A_t\}_{t=1}^{n}$
iii. Calcule a taxa de juros implícita a esse fluxo de caixa, conforme o regime de capitalização, r (composto) pela Definição 3 ou r' (simples) pela Definição 4;
    a. Obtenha a sequência de pagamentos usando a Definição 6 combinada com a Equação 5 ou a Equação 9, a depender do regime de capitalização;
iv. Decomponha P_0 em *n* parcelas $\{P_{0,j}\}_{j=1}^{n}$, tal que $P_0 = \sum_{j=1}^{n} P_{0,j}$, com $P_{0,j} = d_j \times R_j$, em que d_j é o fator de desconto definido da seguinte forma

$$d_j = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+r)^j}, \text{se capitalização composta; ou} \\ \dfrac{1}{1+r' \times j}, \text{se capitalização simples;} \end{cases}$$

v. Consolide os juros de cada contrato ou prestação a cada período da seguinte forma:

$$J_t = \begin{cases} r \times (1+r)^{t-1} \times \displaystyle\sum_{j=t}^{n} P_{0,j} = r \times P_{t-1}, \text{se capitalização composta; ou} \\ r' \times \displaystyle\sum_{j=t}^{n} P_{0,j} = r' \times \left(P_0 - \displaystyle\sum_{j=1}^{t-1} P_{0,j} \right), \text{se capitalização simples;} \end{cases}$$

vi. Determine a amortização usando a Definição 6:

$$A_t = R_t - J_t;$$

vii. Calcule o saldo devedor, P_t, em cada instante de tempo, tal que

$$P_t = f_t \times \sum_{j=t+1}^{n} P_{0,j} = P_{t-1} - A_t,$$

em que f_t é o fator de atualização definido da seguinte forma:

$$f_t = \begin{cases} (1+r)^t, \text{se capitalização composta; ou} \\ 1 + r' \times t, \text{se capitalização simples.} \end{cases}$$

Pode-se observar como o saldo devedor é capitalizado de forma composta no primeiro caso e de forma linear no segundo caso.

A existência do fator $(1+r)^{t-1}$ no cálculo de juros no caso composto indica a existência de anatocismo, enquanto a falta desse fator no segundo caso indica sua não incidência. Logo, não é porque os juros recaem sempre sobre o saldo devedor anterior que se prova a inexistência da propriedade. É preciso dissecar o que está contido no saldo devedor para entender plenamente do que se trata.

A seguir encontram-se tabelas-síntese dos algoritmos desenvolvidos aqui para cada tipo de capitalização.

Tabela 15: Fórmulas para determinar um sistema de amortização, dado o fluxo de pagamentos

	Capitalização Composta: SGA	Capitalização simples: SACS
Valor financiado	P_0	P_0
Fluxo de caixa	$\{R_t\}_{t=1}^{n}$	$\{R_t\}_{t=1}^{n}$
Taxa de juros	r	r'
Decomposição do valor financiado	$P_{0,j} = \frac{R_j}{(1+r)^j}$	$P'_{0,j} = \frac{R_j}{1+r' \times j}$
Juros	$J_t = r \times (1+r)^{t-1} \times \sum_{j=t}^{n} P_{0,j} =$ $= r \times P_{t-1}$	$J'_t = r' \times \sum_{j=t}^{n} P_{0,j}$
Amortização	$A_t = R_t - J_t$	$A'_t = R_t - J'_t$
Saldo Devedor	$P_t = (1+r)^t \times \sum_{j=t+1}^{n} P_{0,j}$ $= P_{t-1} - A_t$	$P'_t = (1 + r' \times t) \times \sum_{j=t+1}^{n} P'_{0,j} =$ $= P'_{t-1} - A'_t$

Convém apenas pontuar que o valor financiado e o fluxo de caixa das colunas coincidem. O restante das variáveis é diferente, daí o apóstrofo para indicar esse fato. Entretanto, o total de juros pagos em ambos os regimes é o mesmo, visto que valor financiado e parcelas são iguais.

Tabela 16: Fórmulas para determinar um sistema de amortização, dado o fluxo de amortizações

	Capitalização Composta: SGA	Capitalização simples: SACS
Valor financiado	P_0	P_0
Fluxo de amortizações	$\{A_t\}_{t=1}^{n}$	$\{A_t\}_{t=1}^{n}$
Taxa de juros	r	r
Juros	$J_t = r \times P_{t-1}$	$J'_t = r' \times \left(P_0 - \sum_{j=1}^{t-1} \frac{R_j}{1+r \times j}\right), t > 1;$ $J'_1 = r' \times P_0$
Pagamento	$R_t = A_t + J_t$	$R' = A_t + J'_t$
Saldo Devedor	$P_t = P_{t-1} - A_t$	$P'_t = P'_{t-1} - A_t$

Convém pontuar que o valor financiado e o fluxo de caixa das colunas terão valores diferentes, quando as taxas de juros forem iguais em ambos os regimes de capitalização. Nesse caso, o total de juros do SGA será maior que no caso SACS.

10.2 DATA-FOCAL CONSISTENTE

Em capitalização simples, a mudança da dato-focal causa uma série de problemas. Por exemplo, no caso de pagamentos uniformes, é infactível usar no SACS uma mesma taxa de juros simultaneamente consistente com uma data focal $k = 0$ e $k \neq 0$.

Quando a data-focal não é a inicial, o pagamento uniforme compatível com outra data-focal acaba sendo menor do que seria se calculado na data inicial. Nesse caso, seria preciso recalcular a taxa de juros do SACS para torná-lo consistente com essa nova data-focal. Essa situação é abordada na próxima seção.

Por outro lado, é possível encontrar um fluxo de pagamentos simultaneamente consistente com a data-focal inicial e outra qualquer, desde que os pagamentos sejam irregulares de alguma forma, o que mostra a generalidade do modelo. Basicamente, dada a data-focal, k, o prazo, n, o valor emprestado, P_0 e a taxa de juros, r', resolve-se o seguinte problema de otimização em consonância com o SACS[21]:

$$\min_{\{R_t'\}_{t=1}^{n}} \left\{ \sum_{t=1}^{k} R_t' \times [1 + r' \times (k - t)] + \sum_{t=k+1}^{n} \frac{R_t'}{1 + r' \times (t - k)} - P_0 \times (1 + r' \times k) \right\}^2 \text{ sujeito a}$$

$$P_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{R_t'}{(1 + r' \times t)}.$$

[21] No fundo o problema é achar uma sequência de pagamentos que satisfaz duas datas-focais simultaneamente, sendo uma delas a data inicial. Encontrar uma data-focal cujos pagamentos não satisfaçam a data-focal inicial implica inconsistência do sistema de amortização conforme a Definição 7.

Como exemplo, suponha um empréstimo de \$ 120 mil, a ser pago em 12 parcelas, sob uma taxa de juros de 2% ao período, e data focal $k = 6$. Num programa de otimização[22], encontra-se o seguinte resultado[23]:

Tabela 17: Data Focal $\boldsymbol{k = 6}$ – $\boldsymbol{r' = 2}\%$

Período	Amortização	Fluxo a Pagar	Juros	Pagamento	Saldo Devedor
	$A'_t = R'_t - J'_t$	$D_t = P'_0 - \sum_{j=1}^{t-1} \frac{R_j}{(1 + r' \times j)}$	$J'_t = r' \times D_t$	R'_t	$P'_t = P'_{t-1} - A'_t$
0					\$ 120.000,00
1	\$ 33.958,41	\$ 120.000,00	\$ 2.400,00	\$ 36.358,41	\$ 86.041,59
2	\$ 10.249,74	\$ 84.354,50	\$ 1.687,09	\$ 11.936,83	\$ 75.791,85
3	\$ 10.722,85	\$ 72.876,78	\$ 1.457,54	\$ 12.180,38	\$ 65.069,00
4	\$ 10.712,48	\$ 61.385,85	\$ 1.227,72	\$ 11.940,20	\$ 54.356,52
5	\$ 10.235,96	\$ 50.330,11	\$ 1.006,60	\$ 11.242,56	\$ 44.120,56
6	\$ 9.309,86	\$ 40.109,60	\$ 802,19	\$ 10.112,06	\$ 34.810,70
7	\$ 8.201,11	\$ 31.080,98	\$ 621,62	\$ 8.822,73	\$ 26.609,58
8	\$ 7.161,06	\$ 23.341,74	\$ 466,83	\$ 7.627,89	\$ 19.448,53
9	\$ 6.184,59	\$ 16.765,97	\$ 335,32	\$ 6.519,91	\$ 13.263,93
10	\$ 5.267,09	\$ 11.240,62	\$ 224,81	\$ 5.491,90	\$ 7.996,85
11	\$ 4.404,37	\$ 6.664,04	\$ 133,28	\$ 4.537,65	\$ 3.592,48
12	\$ 3.592,48	\$ 2.944,66	\$ 58,89	\$ 3.651,37	\$ (0,00)

Note que se mantém intacta a fundamentação econômica original do sistema, sem o emprego de artifícios algébricos, como separar a parte capitalizável da não capitalizável.

O ideal é trabalhar com a data-focal $k = 0$, por ser a mais natural de um sistema de amortização e que permita entender as diferenças com a capitalização composta de forma mais intuitiva e direta.

[22] Testaram-se outras alternativas, com todas os pagamentos irregulares, usando-se o Solver do Excel. A planilha está disponível por e-mail. O caso de centenas de prestações não foi testado. Pode ser necessário programar o procedimento, usando R, por exemplo, e introduzir restrições adicionais.
[23] Esse problema é sensível ao valor inicial. No exemplo, o valor inicial foi fixado em \$ 12 mil para todas as parcelas.

10.3 DATA-FOCAL INCONSISTENTE

Outra forma de resolver o problema é encontrar o valor das parcelas que satisfazem a data-focal requerida, dada uma determinada taxa de juros. Essas parcelas, contudo, quando trazidas a valor presente por essa taxa de juros não se igualam ao valor emprestado. Portanto, deve-se encontrar a taxa de desconto a ser aplicada no SACS aos mesmos pagamentos que satisfazem a data focal requerida.

Nesse sentido, a taxa de desconto tem a mesma função do fator de separação de parcelas capitalizáveis e não capitalizáveis de Forger (2009). No caso de capitalização uniforme, isso significa reduzir a taxa de juros que fora empregada para encontrar o valor do pagamento na data-focal requerida. O fator de separação de Forger (2009) reduz a parcela sobre a qual incidem a taxa de juros requerida. Ou seja, o efeito de reduzir a parcela capitalizável é equivalente a reduzir a taxa de juros no SACS para igualar as parcelas ao valor emprestado.

No caso de serem dadas as amortizações contábeis, a data-focal, k, e a taxa de juros, r, é necessário resolver o seguinte problema:

$$\min_{r'}\left\{\sum_{t=1}^{k} R'_t \times [1 + r \times (k-t)] + \sum_{t=k+1}^{n} \frac{R'_t}{1 + r \times (t-k)} - P_0 \times (1 + r \times k)\right\}^2 \text{ sujeito a}$$

$$R'_1 = A_1 + r' \times P'_0; \text{e}$$

$$R'_t = A_t + r \times \left[P'_0 - \sum_{j=1}^{t-1} \frac{R'_j}{(1 + r' \times j)}\right], t > 1 \,.$$

O exemplo usando o sistema Americano é este aqui:

Tabela 18: Data Focal $k = 6$: $r' = 2,1\%$ e $r = 2,0\%$

Período	Amortização	Fluxo a Pagar	Juros	Pagamento	Saldo Devedor
	A'_t	$D_t = P'_0 - \sum_{j=1}^{t-1} \frac{R_j}{(1 + r' \times j)}$	$J'_t = r' \times D_t$	$R'_t = A'_t + J'_t$	$P'_t = P'_{t-1} - A'_t$
0					\$ 120.000,00
1	\$ -	\$ 120.000,00	\$ 2.531,57	\$ 2.531,57	\$ 120.000,00
2	\$ -	\$ 117.520,73	\$ 2.479,27	\$ 2.479,27	\$ 120.000,00
3	\$ -	\$ 115.141,83	\$ 2.429,08	\$ 2.429,08	\$ 120.000,00
4	\$ -	\$ 112.857,33	\$ 2.380,89	\$ 2.380,89	\$ 120.000,00
5	\$ -	\$ 110.661,72	\$ 2.334,57	\$ 2.334,57	\$ 120.000,00
6	\$ -	\$ 108.549,91	\$ 2.290,02	\$ 2.290,02	\$ 120.000,00
7	\$ -	\$ 106.517,19	\$ 2.247,13	\$ 2.247,13	\$ 120.000,00
8	\$ -	\$ 104.559,20	\$ 2.205,83	\$ 2.205,83	\$ 120.000,00
9	\$ -	\$ 102.671,90	\$ 2.166,01	\$ 2.166,01	\$ 120.000,00
10	\$ -	\$ 100.851,52	\$ 2.127,61	\$ 2.127,61	\$ 120.000,00
11	\$ -	\$ 99.094,57	\$ 2.090,54	\$ 2.090,54	\$ 120.000,00
12	\$ 120.000,00	\$ 97.397,78	\$ 2.054,75	\$ 122.054,75	\$ -

Note que as parcelas não são constantes como no caso de capitalização composta.

No caso em que não são dadas as amortizações, como na hipótese de pagamento uniforme, pode-se resolver o seguinte problema:

$$\min_{r',R'} \left\{ P_0 - \sum_{t=1}^{n} \frac{R'}{(1 + r' \times t)} \right\}^2 \text{ sujeito a}$$

$$\sum_{t=1}^{k} R' \times [1 + r \times (k - t)] + \sum_{t=k+1}^{n} \frac{R'}{1 + r \times (t - k)} = P_0 \times (1 + r \times k).$$

Tabela 19: Data Focal $k = 6 - r' = 2,04\%$ e $r = 2,00\%$

Período	Amortização	Fluxo a Pagar	Juros	Pagamento	Saldo Devedor
	$A'_t = R'_t - J'_t$	$D_t = P'_0 - \sum_{j=1}^{t-1} \frac{R_j}{(1 + r' \times j)}$	$J'_t = r' \times D_t$	$R'_t = R'$	$P'_t = P'_{t-1} - A'_t$
0					$ 120.000,00
1	$ 8.834,54	$ 120.000,00	$ 2.447,06	$ 11.281,60	$ 111.165,46
2	$ 9.060,00	$ 108.943,86	$ 2.221,60	$ 11.281,60	$ 102.105,46
3	$ 9.281,04	$ 98.104,34	$ 2.000,56	$ 11.281,60	$ 92.824,41
4	$ 9.497,84	$ 87.473,11	$ 1.783,77	$ 11.281,60	$ 83.326,58
5	$ 9.710,54	$ 77.042,34	$ 1.571,06	$ 11.281,60	$ 73.616,03
6	$ 9.919,31	$ 66.804,58	$ 1.362,29	$ 11.281,60	$ 63.696,72
7	$ 10.124,29	$ 56.752,84	$ 1.157,31	$ 11.281,60	$ 53.572,43
8	$ 10.325,61	$ 46.880,47	$ 955,99	$ 11.281,60	$ 43.246,82
9	$ 10.523,40	$ 37.181,18	$ 758,20	$ 11.281,60	$ 32.723,42
10	$ 10.717,78	$ 27.649,01	$ 563,82	$ 11.281,60	$ 22.005,64
11	$ 10.908,87	$ 18.278,30	$ 372,73	$ 11.281,60	$ 11.096,77
12	$ 11.096,77	$ 9.063,67	$ 184,83	$ 11.281,60	$ -